

### Exercice 3 Antilles Guy – Sept 2010

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

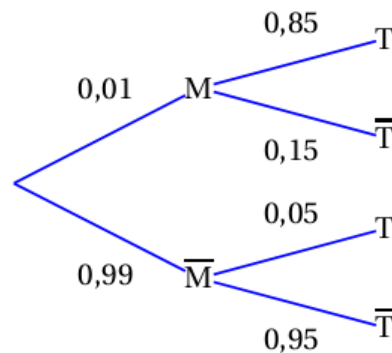
On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;

T l'évènement : « le test est positif ».

#### 1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.



#### 2. Un animal est choisi au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

On suit la première branche : la probabilité est égale à  $p(M) \times p_M(T) = 0,01 \times 0,85 = 0,0085$ .

b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

La probabilité qu'il soit non porteur de la maladie et que son test soit positif (troisième branche) est égale à  $0,99 \times 0,05 = 0,0495$ .

On a donc  $p(T) = p(M) \times p_M(T) + p(\bar{M}) \times p_{\bar{M}}(T) = 0,0085 + 0,0495 = 0,058$ .

#### 3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

Il faut calculer  $p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{0,0085}{0,058} \approx 0,1466$ .

#### 4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.

On note  $X$  la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par  $X$  ?

On répète 5 fois de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli ( $S = \ll \text{le test est positif} \gg$ ) avec

$p(S) = 0,058$  donc c'est un schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 5$  et  $p = 0,058$ .

X suit donc la loi binomiale  $\mathcal{B}(5; 0,058)$ .

La probabilité que  $k$  animaux aient un test positif est égale à :  $\binom{5}{k} \times 0,058^k \times (1-0,058)^{5-k}$ .

*Facultatif* : On obtient le tableau de la loi de probabilité de X suivant :

|              |        |        |        |        |        |   |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|---|
| $X = x_i$    | 0      | 1      | 2      | 3      | 4      | 5 |
| $p(X = x_i)$ | 0,7417 | 0,2284 | 0,0281 | 0,0017 | 0,0001 | 0 |

**b.** Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

L'évènement contraire est : tous les animaux ont un test négatif qui d'après le tableau précédent a une probabilité d'environ 0,7417.

Si le tableau n'a pas été réalisé :  $p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,942^5$

La probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif est donc :  $1 - 0,7417 = 0,2583$ .

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

|             |        |        |         |
|-------------|--------|--------|---------|
| Coût        | 0      | 100    | 1 000   |
| Probabilité | 0,9405 | 0,0580 | 0,001 5 |

**a.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

On a d'après les données du tableau :  $E = 0 \times 0,9405 + 100 \times 0,0580 + 1000 \times 0,0015 = 5,80 + 1,50 = 7,30$  .

Ceci représente le coût moyen par animal.

**b.** Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

Pour 200 bêtes, le coût sera en moyenne de :  $200 \times 7,30 = 1460$ .