Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$$

1. Justifiez que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et montrez que pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}$$

En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}^*$.

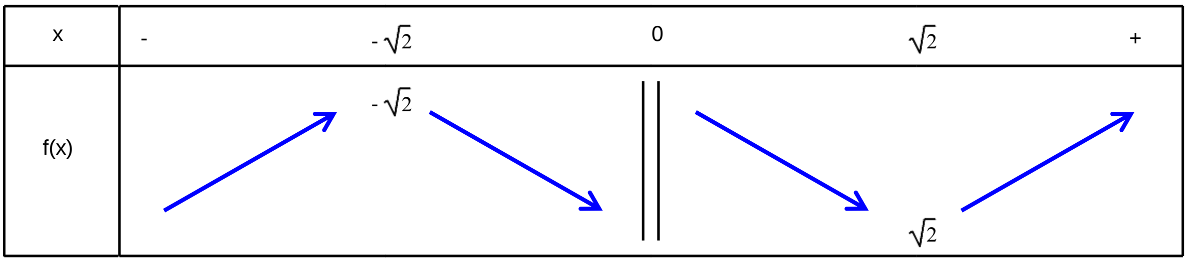
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{x^2}\right) = \frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{2x^2}.$$

f ' est du signe du numérateur car $2x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

On peut en déduire le tableau du signe de $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$:

x	-		- $\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		+
x^2-2		+	0	−	0	+	

Puis celui des variations de f (les limites ne sont pas demandées):



2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = f(u_n)$

a. Calculer u_1, u_2 et u_3 vous donnerez les résultats sous la forme de fractions puis sous forme décimale arrondie à 10^{-5}.

$$u_1 = f(u_0) = f(2) = \frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{2}\right) = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{17}{6} = \frac{17}{12} \approx 1{,}41666$$

$$u_3 = f(u_2) = f\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12}+\frac{24}{17}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{577}{204} = \frac{577}{408} \approx 1{,}41421$$

b. Quelles conjectures pouvez-vous émettre quant à la monotonie et la convergence de la suite (u_n) ?

D'après la question précédente, $u_1 > u_2 > u_3$, on peut donc supposer que la suite est décroissante et elle semble converger vers une valeur proche de 1,4.

3. Démontrez que pour tout entier naturel $n, \sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq 2$ et conclure sur la convergence de la suite (u_n).

Nommons $P(n)$ la proposition « $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ » pour $n \geq 0$.

<u>Initialisation</u> : $u_0 = 2$ et $u_1 = 1,5$ donc $\sqrt{2} \leq u_1 \leq u_0 \leq 2$ ce qui prouve que $P(0)$ est vraie.

<u>Hérédité</u> : Supposons qu'il existe k entier naturel pour lequel, quelque soit $0 \leq k \leq n$, $\sqrt{2} \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 2$.

Peut-on établir dans ce cas que $\sqrt{2} \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 2$?

On sait que $\sqrt{2} \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 2$ et que f est strictement croissante sur $\left[\sqrt{2}\,;2\right]$ donc

$$f\left(\sqrt{2}\right) \leq f\left(u_{k+1}\right) \leq f\left(u_k\right) \leq f(2)$$

or $f\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$ et $f(1) = 1,5$ $f\left(u_{k+1}\right) = u_{k+2}$ et $f\left(u_k\right) = u_{k+1}$

donc $f\left(\sqrt{2}\right) \leq f\left(u_{k+1}\right) \leq f\left(u_k\right) \leq f(2) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 1,5$

et comme $1,5 \leq 2$, on en déduit que

$$\sqrt{2} \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 2$$

Ainsi $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.

On vient de démontrer que la suite (u_n) est décroissante et bornée (donc minorée) alors elle converge vers un réel L tel que $\sqrt{2} \leq L \leq 2$.

4. Démontrer que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$

Etudions le signe de la différence : $\left(u_{n+1} - \sqrt{2}\right) - \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\left(u_{n+1} - \sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2} - \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2} - \frac{1}{2}u_n + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{1}{u_n} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - u_n\sqrt{2}}{2u_n}\end{aligned}$$

On sait, d'après la question précédente que $\sqrt{2} \leq u_n \leq 2$ donc

$2 \leq \sqrt{2}u_n \leq 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad -2 \geq -\sqrt{2}u_n \geq -2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \geq 2 - \sqrt{2}u_n \geq 2 - 2\sqrt{2}$.

En conclusion :

$$\left(u_{n+1} - \sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) = \frac{2 - u_n\sqrt{2}}{2u_n} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(u_{n+1} - \sqrt{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) \Rightarrow \left(u_{n+1} - \sqrt{2}\right) < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$$

5. En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$

Nommons $P(n)$ la proposition « $0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$ » pour $n \geq 0$.

Initialisation : $u_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(2 - \sqrt{2}\right) = 2 - \sqrt{2}$ donc $0 < u_0 - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$ ce qui prouve que $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons qu'il existe k entier naturel pour lequel, quelque soit $0 \leq k \leq n$,

$$0 < u_k - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(u_0 - \sqrt{2}\right).$$

Peut-on établir dans ce cas que $0 < u_{k+1} - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$?

On sait que $u_{k+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}\left(u_k - \sqrt{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(u_0 - \sqrt{2}\right)\right)$ soit $u_{k+1} - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$

Ainsi $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Conclusion : pour tout entier naturel n, $0 < u_n - \sqrt{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$.

6. Conclure sur la limite de la suite (u_n).

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right) = 0$ (car $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$) donc $\lim_{n \to +\infty} \left(u_n - \sqrt{2}\right) = 0$ et on peut en déduire que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$.

7. On propose l'algorithme suivant :

```
Variables
 n : entier, e, u0 réels
Début :
Entrer e, u0
n ← 0
Tant que :
     (1/2)^n (u0 − √2) ≥ e
Faire : n ← n+1
FinTantQue
Afficher n
Fin
```

Que représente le nombre n affiché en fin d'algorithme ?
Au bout de combien d'itération sera-t-on sûr que u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ avec une précision de 10^{-9} ?

Le nombre n affiché en fin d'algorithme est le rang à duquel $\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(u_0 - \sqrt{2}\right)$ ou la différence entre u_n et $\sqrt{2}$ devient inférieure à e entré au début.
On trouve $n = 30$ à l'aide du programme ci-dessous.


TEXAS INSTRUMENTS
TI-82 Stats.fr
PROGRAM:O
:Prompt E,U
:0→N
:While ((1/2)^N)
(U−√(2))≥E
:N+1→N
:End
:Disp N


TEXAS INSTRUMENTS
TI-82 Stats.fr
prgmO
E=?10^(-9)
U=?2
30
30
Done