Terminale S3	Évaluation n°3 – Fonctions expo et trigo (2h)	13/12/2017

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des deux affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. il est attribué un 1,5 point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Affirmation 1**
   L'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

2. **Affirmation 2**
   Si le réel θ appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$, alors $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

Exercice 2 (5,5 points)

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$.

1. Montrer que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.
   En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$ (mettre en évidence les limites du cours utilisées).

2. Montrer que $f(x) = -\frac{e}{x} \times (-x^2)e^{-x^2}$.
   En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$ (mettre en évidence les limites du cours utilisées).

3. (a) On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.Démontrer que pour tout réel x,
   $$f'(x) = (1 - 2x^2)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$
   (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Exercice (2 points + 2 bonus)

Nouvelle Calédonie – Novembre 2015

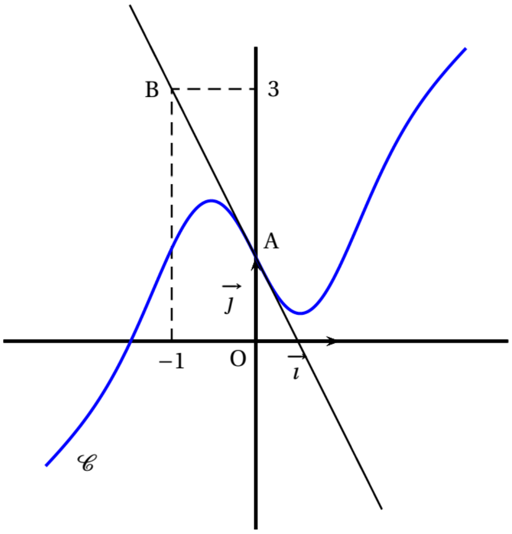
Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^a.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

<u>Exercice 4 (9,5 points)</u> <u>**Métropole – Sept 2014**</u>

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une courbe $\mathcal{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et $(-1; 3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathcal{C}$.

On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}.$$

1. (a) Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point A.

(b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

(c) Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

(d) On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.

Déterminer la valeur du réel a.

2. D'après la question précédente, pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

(a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1; 0]$, $f(x) > 0$.

(b) Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1, $f'(x) > 0$.

(c) Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

Justifier que $c < -\frac{3}{2} + 2.10^{-2}$.