| | | |
|---|---|---|
| **Terminale S3** | **Évaluation n°3 – Fonctions expo et trigo (2h)** | **13/12/2017** |

## Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des deux affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. il est attribué un 1,5 point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. **Affirmation 1**

   L'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Posons $f(x) = x - cosx$.

$f'(x) = 1 + sinx > 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ car $sinx > 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction $f$ est donc strictement croissante et change de signe car $f(0) = -1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

**L'affirmation est VRAIE.**

2. **Affirmation 2**

   Si le réel $\theta$ appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$, alors $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

Si $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ alors $-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ or $\cos(\alpha) > 0$ lorsque $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

En conclusion, si le réel $\theta$ appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$, alors $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

**L'affirmation est FAUSSE.**

<u>*Rem :*</u> un contre exemple aurait suffit. En effet si $\theta = \frac{\pi}{4}$ alors $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(0) = 1$ n'est pa stirctement négatif.

## Exercice 2 (5,5 points)

On considère la fonction $f$ définie pour tout réel $x$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$.

1. Montrer que pour tout réel $x$ différent de 0, $f(x) = \frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

   En déduire la limite de la fonction $f$ en $+\infty$ (mettre en évidence les limites du cours utilisées).

$$\frac{e}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}} = \frac{ex}{e^{x^2}} = exe^{-x^2} = xe^{1-x^2} = f(x)$$

On sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} = 0$ et, par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{x} = 0$, on en déduit, par produit, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Montrer que $f(x) = -\frac{e}{x} \times (-x^2)e^{-x^2}$.

   En déduire la limite de la fonction $f$ en $-\infty$ (mettre en évidence les limites du cours utilisées).

$$-\frac{e}{x} \times (-x^2)e^{-x^2} = ex \times e^{-x^2} = xe^{1-x^2} = f(x)$$

On sait que $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ et comme on sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty$ , alors par composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x^2)e^{-x^2} = 0$.

De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{e}{x} = 0$ , donc par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

**3.** (a) On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f'$ sa dérivée.
Démontrer que pour tout réel $x$, $f'(x) = (1-2x^2)\mathrm{e}^{1-x^2}$.

$$f'(x) = 1 \times e^{1-x^2} + x \times (-2x)e^{1-x^2} = (1-2x^2)e^{1-x^2}$$

(b) En déduire le tableau de variations de la fonction $f$.

Pour tout $x$ réel, $e^{1-x^2} > 0$ donc $f'$ a le même signe que $-2x^2+1$ qui est un polynôme du second degré.

$\Delta = 8 > 0$ donc le polynome admet deux racines distinctes qui sont $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$f' \geq 0$ sur $\left[\frac{-\sqrt{2}}{2} ; \frac{-\sqrt{2}}{2}\right]$ et négative sinon. On obtient alors le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $\searrow$ | $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | $\nearrow$ | $0$ |

## Exercice 3 (2 points + 2 bonus) Nouvelle Calédonie – Novembre 2015

Pour chaque réel $a$, on considère la fonction $f_a$ définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^a.$$

**1.** Montrer que pour tour réel $a$, la fonction $f_a$ possède un minimum.

$f_a$ est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_a'(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2 = \frac{e^x}{e^a} - 2 = \frac{e^x - 2e^a}{e^a}$$

$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2e^a = 0 \Leftrightarrow e^x = 2e^a$ or , à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction exp, pour tout $A > 0$, l'équation $e^x = A$ admet une unique solution $\alpha$. Ainsi il existe $\alpha$ tel que $e^\alpha = 2e^a$.

**2.** Existe-t-il une valeur de $a$ pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

Pour résoudre cette question, il faut utiliser la fonction logarithme népérien.

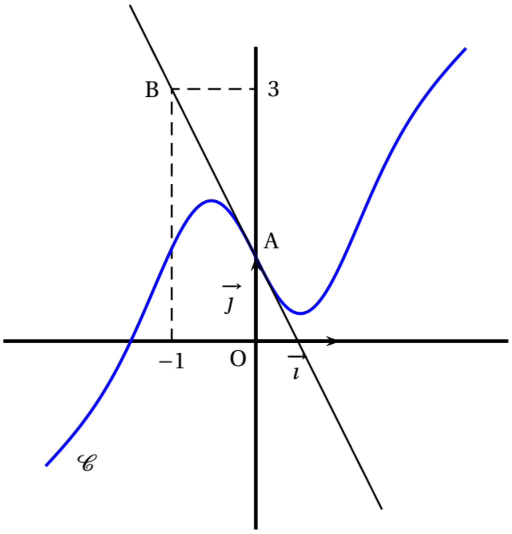
Comme $e^\alpha = 2e^a$ alors $\alpha = \ln(2e^a)$ ; valeur qui minimise la fonction $f_a$.

$f_a(\alpha) = e^{\alpha - a} - 2\alpha + e^a = \frac{e^\alpha}{e^a} - 2\ln(2e^a) + e^a = \frac{2e^a}{e^a} - 2\ln(2e^a) + e^a = 2 - 2\ln(2e^a) + e^a$.

Il faut maintenant étudier les variations de la fonction $x \mapsto 2 - 2\ln(2e^x) + e^x$….

## Exercice 4 (9,5 points) Métropole – Sept 2014

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, une courbe $\mathcal{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives (0 ; 1) et $(-1; 3)$.




On désigne par $f$ la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathcal{C}$.

On suppose, de plus, qu'il existe un réel $a$ tel que pour tout réel $x$,

$$f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}.$$

**1.** (a) Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point A.

Le point A a pour abscisse 0; $f(0) = 1$ donc $\mathcal{C}$ passe par le point A $(0\,;\,1)$.

(b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).

Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{-1-0} = -2$.

(c) Démontrer que pour tout réel $x$,

$$f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

D'après la formule $(e^{u}) = u'\,e^{u}$ et la dérivée d'une somme et d'un produit:

$$f'(x) = 1 + 0 + a\,e^{-x^2} + ax(-2x)e^{-x^2} = 1 - a(2x^2 - 1)\,e^{-x^2}$$

(d) On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.

Déterminer la valeur du réel $a$.

On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A; cela veut dire que le coefficient directeur de (AB) est égal au nombre dérivé de la fonction $f$ en $x_A$ soit $f'(0)$.
On a donc $f'(0) = -2 \Leftrightarrow 1 - a(0-1)\,e^{0} = -2 \Leftrightarrow 1 + a = -2 \Leftrightarrow a = -3$

**2.** D'après la question précédente, pour tout réel $x$,

$$f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

(a) Démontrer que pour tout réel $x$ de l'intervalle $]-1; 0]$, $f(x) > 0$.

$\forall x \in ]-1; 0]$, $-3x \geq 0$ donc $-3xe^{-x^2} \geq 0$.
De plus $\forall x \in ]-1; 0]$, $x + 1 > 0$ : on peut donc en déduire que $f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2} \geq 0$.

(b) Démontrer que pour tout réel $x$ inférieur ou égal à $-1$, $f'(x) > 0$.

Si $x \leq -1$ alors $x^2 \geq 1$ donc $2x^2 - 1 \geq 1 > 0$ et $3(2x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2} > 0$.

On en déduite que $f'(x) = 1 + 3(2x^2-1)\mathrm{e}^{-x^2} > 0$.

(c) Démontrer qu'il existe un unique réel $c$ de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2} ; -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

Justifier que $c < -\frac{3}{2} + 2.10^{-2}$.

Sur $]-\infty ; -1]$, $f'(x) > 0$ donc la fonction $f$ est strictement croissante sur cet intervalle donc sur l'intervalle $\left[-\frac{3}{2} ; -1\right]$.

- Or $f\left(-\frac{3}{2}\right) \approx -0{,}026 < 0$ et $f(-1) \approx 1{,}10 > 0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $\left[-\frac{3}{2} ; -1\right]$; on l'appelle $c$.
- Or $f\left(-\frac{3}{2} + 2.10^{-2}\right) \approx 0{,}017 > 0$ donc $c \in \left[-\frac{3}{2} ; -\frac{3}{2} + 2.10^{-2}\right[$ et donc $c < -\frac{3}{2} + 2.10^{-2}$.