Durée : 4 heures.

SPÉCIALITÉ

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points) Nlle Calédonie Mars 2014

Partie A

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x)$$

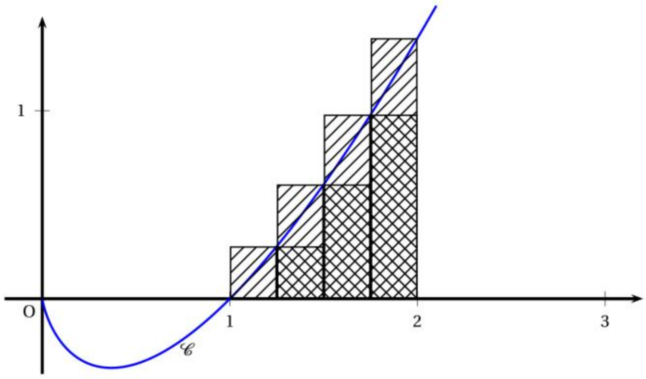
1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$. Montrer que
$$f'(x) = \ln(x) + 1$$
3. Déterminer les variations de f sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$. (voir la figure ci-contre).



Algorithme :

Initialisation $U \leftarrow 0$ $V \leftarrow 0$ $n \leftarrow 4$
Traitement Pour k allant de 0 à $n-1$ Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$ Affecter à V la valeur $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ Fin pour
Affichage Afficher U Afficher V

1. (a) Que représentent U et V sur le graphique précédent ?
(b) Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?
(c) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

2. Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :
$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right] \\ V_n &= \frac{1}{n}\left[f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right) + f(2)\right]. \end{aligned}$$
On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leq \mathcal{A} \leq V_n$.
(a) Trouver le plus petit entier n tel que $V_n - U_n < 0{,}1$.
(b) Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure à 0,1 ?

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0;+\infty[$ par

$$F(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}.$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

2. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Exercice 2 de Spécialité (5 points) Antilles Juin 2017

On considère la suite définie par son premier terme $u_0=3$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1}=2u_n+6.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n=9\times 2^n-6.$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n\geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n\geq 1$, $v_n=\frac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ». Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

4. (a) Démontrer que, pour tout entier $n\geq 1$, $v_{n+1}-2v_n=1$.
(b) En déduire que, pour tout entier $n\geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.
(c) En déduire, pour tout entier $n\geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

5. (a) Vérifier que $2^4\equiv 1\ [5]$.
(b) En déduire que si n est de la forme $4k+2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.
(c) Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ?
Justifier.

Exercice 4 (5 points) Nlle Calédonie Fév 2018

Soient les deux nombres complexes :

$$z_1=1-\mathrm{i}\quad \text{et}\quad z_2=-8-8\sqrt{3}\mathrm{i}.$$

On pose :

$$Z=\frac{z_1}{z_2}.$$

1. Donner la forme algébrique de Z.

2. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3. Écrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.

4. En déduire que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

5. On admet que :

- $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
- pour tous réels a et b, $\cos a\cos b-\sin a\sin b=\cos(a+b)$.

Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x=-2\sqrt{3}.$$

Exercice 3 (5 points) – Asie Juin 2017

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.
En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0; +\infty[$.

2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction g

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f.
On ne demande pas les limites de la fonction f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 5{,}9$ admet une unique solution sur l'intervalle [1 ; 80].
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à -dire au plateau d'être égal à 15.
Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.
On rappelle que la fonction C est définie sur l' intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$C(t)=\frac{d}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.
   (a) Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
   (b) Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang; elle est égale à 5,9 micromole par litre.
   Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.

2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.