Exercice 1 (5 points) Nlle Calédonie Mars 2014

Partie A

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x)$$

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

D'après le cours, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty \text{ (par produit) donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$

La fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme produit de fonctions dérivables:

$$f'(x) = 1\times\ln(x) + x\times\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

3. Déterminer les variations de f sur $]0;+\infty[$.

On étudie le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$:

$$\ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-1}$$

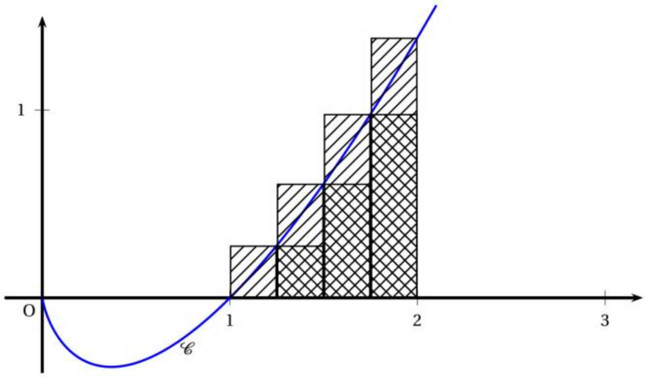
- La fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}]$;
- la fonction f est strictement croissante sur $[\,\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$.

Partie B

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode des rectangles, une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$. (voir la figure ci-contre).



Algorithme :

Initialisation
$U \leftarrow 0$
$V \leftarrow 0$
$n \leftarrow 4$
Traitement
Pour k allant de 0 à $n-1$
Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$
Affecter à V la valeur $V + \frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
Fin pour
Affichage
Afficher U
Afficher V

1. (a) Que représentent U et V sur le graphique précédent ?

Sur la figure ci-dessus, le nombre U représente la somme des aires des rectangles inférieurs (en rouge); cette somme minore l'aire sous la courbe. Le nombre V représente la somme des aires des rectangles supérieurs (en bleu); cette somme majore l'aire sous la courbe.

(b) Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?

On fait tourner l'algorithme ci-dessus:

Variables	k	U	V	n
Initialisation		0	0	4
Traitement	0	0	0,0698	4
	1	0,0697	0,2218	4
	2	0,2217	0,4667	4
	3	0,4666	0,8132	4
Affichage	On affiche la valeur de U: 0,4666			
	On affiche la valeur de V: 0,8132			

(c) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

On peut donc en déduire que $0{,}4666 < \mathcal{A} < 0{,}8132$.

2. Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right] \\ V_n &= \frac{1}{n}\left[f\left(1+\frac{1}{n}\right) + f\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right) + f(2)\right] \end{aligned}.$$

On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leq \mathcal{A} \leq V_n$.

(a) Trouver le plus petit entier n tel que $V_n - U_n < 0{,}1$.

On peut dire que $V_n - U_n = \frac{1}{n}\big(f(2) - f(1)\big) = \frac{2\ln(2)-0}{n} = \frac{2\ln(2)}{n}$.

$$V_n - U_n < 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{2\ln(2)}{n} < 0{,}1 \Leftrightarrow 2\ln(2) < 0{,}1\, n \Leftrightarrow \frac{2\ln(2)}{0{,}1} < n$$

Or $\frac{2\ln(2)}{0{,}1} \approx 13{,}86$ donc le plus petit entier n tel que $V_n - U_n$ soit inférieur à 0,1 est 14.

Vérification: $V_{13} - U_{13} \approx 0{,}107 > 0{,}1$ et $V_{14} - U_{14} \approx 0{,}099 < 0{,}1$.

(b) Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure à 0,1 ?

Pour obtenir un encadrement de $\mathcal{A}$ d'amplitude inférieure à 0,1 dans l'algorithme, il suffit d'entrer 14 comme valeur de n; autrement dit, au lieu de n prend la valeur 4, on entrera n prend la valeur 14.

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0;+\infty[$ par

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

$$F'(x) = \frac{2x}{2} \times \ln(x) + \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} - \frac{2x}{4} = x\ln(x) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x\ln(x) = f(x)$$

Donc F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

La fonction f est croissante sur $[1 ; 2]$ et $f(1) = 0$ donc la fonction f est positive sur $[1 ; 2]$; on peut donc dire que $\mathcal{A} = \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\mathcal{A} = \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t = F(2) - F(1) = (2\ln(2) - 1) - \left(-\frac{1}{4}\right) = 2\ln(2) - \frac{3}{4}$$

Exercice 2 de Spécialité (5 points) Antilles Juin 2017

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n - 6$.

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété: « $u_n = 9 \times 2^n - 6$ ». Démontrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation**. On a $u_0 = 3$ et $9 \times 2^0 - 6 = 9 - 6 = 3$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité**. Supposons que, pour un entier naturel $n, n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $u_n = 9 \times 2^n - 6$, donc
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + 6 \\ &= 2(9 \times 2^n - 6) + 6 \\ &= 9 \times 2 \times 2^n - 12 + 6 = \boxed{9 \times 2^{n+1} - 6} \end{aligned}$$
et la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie. La propriété est héréditaire.
- **Conclusion.** La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n supérieur ou égal à zéro, elle est vraie au rang $n + 1$.
D'après le principe de la récurrence, pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

Pour $n \geq 1$, $9 \times 2^n = 3 \times 3 \times 2 \times 2^{n-1} = 6 \times 3 \times 2^{n-1} \equiv 0 \ [6]$ (2^{n-1} est entier car $n \geq 1$).
De plus, $-6 \equiv 0 \ [6]$ ce qui permet d'en déduire que $6 \times 3 \times 2^{n-1} - 6 \equiv 0 \ [6]$ soit $u_n \equiv 0 \ [6]$.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ». Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

X	Y1
1	2
2	5
3	11
4	23
5	47
6	95
7	191
8	383

L'affirmation est fausse. En effet on a $v_6 = \frac{u_6}{6} = \frac{9 \times 2^6 - 6}{6} = \frac{570}{6} = 95$ qui n'est pas un nombre premier.

4. (a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors:

$$v_{n+1} - 2v_n = \frac{u_{n+1}}{6} - 2 \times \frac{u_n}{6} = \frac{2u_n + 6 - 2u_n}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après la relation précédente, il existe deux entiers a et b tels que $av_n + bv_{n+1} = 1$.
Le théorème de Bézout permet alors de conclure que v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

(c) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 6v_n$ et $u_{n+1} = 6v_{n+1}$.
Donc $PGCD(u_n, u_{n+1}) = PGCD(6v_n, 6v_{n+1}) = 6 \times PGCD(v_n, v_{n+1}) = 6 \times 1$.
$PGCD(u_n, u_{n+1}) = 6$.

5. (a) Vérifier que $2^4 \equiv 1 \; [5]$.

On a $2^4 = 16 = 3 \times 5 + 1$ donc $2^4 \equiv 1[5]$.

(b) En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

Soit $k \in \mathbb{N}$, et $n = 4k + 2$, alors:

$$\begin{aligned} u_n &= 9 \times 2^{4k+2} - 6 \\ &= 9 \times (2^4)^k \times 2^2 - 6 \end{aligned}$$

Comme $2^4 \equiv 1 \; [5]$ on en déduit que $(2^4)^k \equiv 1^k \; [5]$ puis que :

$$\begin{aligned} u_n &\equiv 9 \times 1^k \times 4 - 6 \; [5] \\ &\equiv 4 \times 1 \times 4 - 1 \; [5] \\ &\equiv 15[5] \equiv 0 \; [5] \end{aligned}$$

Le nombre u_n est alors divisible par 5.

(c) Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.

Tout entier naturel n s'écrit $n = 4k$ ou $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 2$ ou $n = 4k + 3$ avec k un entier naturel.
De la même manière que précédemment on montre que

* Si $n = 4k$ alors $u_n = 9 \times 2^{4k} - 6 \equiv 3[5]$

* Si $n = 4k + 1$ alors $u_n = 9 \times 2^{4k+1} - 6 = 18 \times 2^{4k} - 6 \equiv 2[5]$

* Si $n = 4k + 3$ alors $u_n = 9 \times 2^{4k+3} - 6 = 72 \times 2^{4k} - 6 \equiv 1[5]$

donc si $n \neq 4k + 2$, u_n n'est pas divisible par 5.

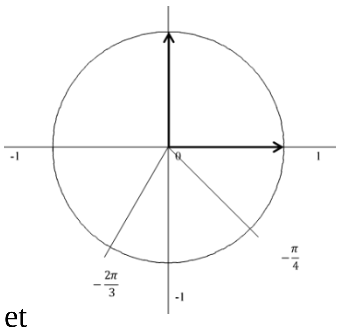
Exercice 4 (5 points) Nlle Calédonie Fév 2018

Soient les deux nombres complexes : $z_1 = 1 - \mathrm{i}$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}\mathrm{i}$.
On pose : $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Donner la forme algébrique de Z.

$$\begin{aligned} Z = \frac{z_1}{z_2} &= \frac{1 - i}{-8 - 8\sqrt{3}\, i} \\ &= \frac{(1 - i)(-8 + 8\sqrt{3}\, i)}{(-8 - 8\sqrt{3}\, i)(-8 + 8\sqrt{3}\, i)} \\ &= \frac{-8 + 8\sqrt{3}\, i + 8\, i + 8\sqrt{3}}{64 + 192} = \frac{-8 + 8\sqrt{3}}{256} + i\, \frac{8 + 8\sqrt{3}}{256} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{32} + i\, \frac{1 + \sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

2. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.



- $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ donc
  $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $-\frac{\pi}{4}$ est un argument de z_1
  La forme exponentielle de z_1 est $\sqrt{2}\, \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$.

- $|z_2| = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{256} = 16$ donc $z_2 = 16\left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $-\frac{2\pi}{3}$ est un argument de z_2. La forme exponentielle de z_2 est $16\, \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

3. Écrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.

$$Z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}{16\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{16}\,e^{\,i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{16}\,e^{\,i\frac{5\pi}{12}}\ \text{donc}\ Z=\frac{\sqrt{2}}{16}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\,i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

La forme exponentielle de Z est $\frac{\sqrt{2}}{16}\ \mathrm{e}^{\,i\frac{5\pi}{12}}$ et sa forme trigonométrique $\frac{\sqrt{2}}{16}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\,i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

4. En déduire que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

En comparant la forme algébrique et la forme trigonométrique de Z, on obtient:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{16}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{-1+\sqrt{3}}{32}\quad\Leftrightarrow\quad\cos\frac{5\pi}{12}&=\frac{16}{\sqrt{2}}\times\frac{-1+\sqrt{3}}{32}\\&=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\\&=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

5. On admet que :

- $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
- pour tous réels a et b, $\cos a\cos b-\sin a\sin b=\cos(a+b)$.

Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:

$$\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cos x-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin x=-2\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned}(E)&\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\cos x-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\&\Leftrightarrow\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)\cos x-\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\sin x\ =\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\\&\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\ &\Leftrightarrow\ x+\frac{5\pi}{12}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\ \ ou\ \ x+\frac{5\pi}{12}=-\frac{5\pi}{6}+k'2\pi\ \text{ avec }\ k'\in\mathbb{Z}\\&\Leftrightarrow\ x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi\ \ ou\ \ x=-\frac{5\pi}{4}+k'2\pi\ \text{avec}\ k'\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble des réels s'écrivant sous la forme :

$$\boxed{x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi\quad ou\quad x=-\frac{5\pi}{4}+k'2\pi\quad\text{avec}\ k\ et\ k'\in\mathbb{Z}}$$

Exercice 3 (5 points) – Asie Juin 2017

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $C(t)=\frac{d}{a}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0; +\infty[$.

La fonction C est dérivable sur R et $C'(t) = 12\left(0 - \left(-\frac{7}{80}\right)\ \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right) = \frac{21}{20}\ \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t} > 0$ sur $[0; +\infty[$, donc la fonction C est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Le plateau est la limite de la fonction C en $+\infty$.
On a $\lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{7}{80}t = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{7}{80}t} = 0$.
On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 12$.

Le plateau devrait être égal à 15; il n'est que de 12 donc le traitement n'est pas adapté.

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1$.

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables et

$$f'(x) = 105\left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \left(1 - \ \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right) + \frac{105}{x} \times \left(0 - \left(-\frac{3}{40}\ \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right)\right)$$

$$= \frac{105}{x^2}\left(-1 + \ \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \frac{3x}{40}\ \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}}\right) = \frac{105\ g(x)}{x^2}$$

où g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{3x}{40}\ \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1$.

2. On donne le tableau de variation de la fonction g

x	0		$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f.
On ne demande pas les limites de la fonction f.

$f'(x) = \frac{105\ g(x)}{x^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

D'après le tableau de variation de la fonction g, $g(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$, donc $f'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$ et donc la fonction f est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 5{,}9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; 80]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

D'après la question précédente la fonction f est continue car dérivable et strictement décroissante sur $[1; 80]$ de $f(1) = 105\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}}\right) \approx 7{,}59$ à $f(80) = \frac{105}{80}\left(1 - \mathrm{e}^{-6}\right) \approx 1{,}31$.
Comme $5{,}9 \in [1{,}31; 7{,}59]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel unique $\alpha \in [1; 80]$, tel que $f(\alpha) = 5{,}9$.

La calculatrice donne $f(8) \approx 5{,}92 > 5{,}9$ et $f(9) \approx 5{,}73 < 5{,}9$, donc $8 < \alpha < 9$;

$f(8{,}1) \approx 5{,}902 > 5{,}9$ et $f(8{,}2) \approx 5{,}882 < 5{,}9$, donc $8{,}1 < \alpha < 8{,}2$.

On a donc au dixième près $a \approx 8{,}1$.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à -dire au plateau d'être égal à 15.
Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.
On rappelle que la fonction C est définie sur l' intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.
(a) Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.

Puisque $C(t) = \frac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$, on a :
$C(6) = \frac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}\times 6}\right) = \frac{105}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}a}\right) = f(a)$, d'après la question précédente.

(b) Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang; elle est égale à 5,9 micromole par litre.
Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.

Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 5,9 micromole par litre.
On a vu dans la dernière question de la partie précédente que l'équation $f(a) = 5{,}9$ admet une solution unique et que cette solution vaut environ 8,1.
On prendra donc 8,1 comme valeur approchée de la clairance a de ce patient.

2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

On souhaite que $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t) = 15$ c'est-à-dire que $\frac{d}{a} = 15 \Leftrightarrow \frac{d}{8{,}1} = 15 \Leftrightarrow d = 15 \times 8{,}1 = 121{,}5$.
Le débit sera donc de 121,5 micromole par heure pour avoir un plateau égal à 15 et donc un traitement efficace.