BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2017/2018

BAC BLANC

MATHÉMATIQUES

SÉRIE: S – SVT

Spécialité Maths

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES **COEFFICIENT: 9**

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6 .

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les QUATRE exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (*5 points*)

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

Soit A un point de C_f et B un point de C_g.

On suppose que l'on peut construire une droite passant par A et B qui soit à la fois tangente à C_f au point A et tangente à C_g au point B ?

Tracer aux mieux cette tangente sur la figure de l'**annexe**.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de cette tangente commune que l'on note $\mathcal{D}$.

Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. (a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

(b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.

(c) En déduire que $b = -a$.

2. Déterminer deux expressions de l'équation réduite de $\mathcal{D}$ puis en déduire que le réel a est solution de l'équation :

$$2(x-1)\mathrm{e}^{x} + 1 = 0.$$

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^{x} + 1.$$

1. (a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

(b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.

(c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

2. (a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

(b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.

À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

<u>*Question bonus :*</u> Montrer que les courbes C_f et C_g admettent exactement deux tangentes communes.

Exercice 2 (5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3,\ u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.
On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.

3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

4. Ecrire un algorithme qui affiche le rang N pour lequel $u_N > 7 - m$ où m est une valeur positive inférieure à 1 entrée par l'utilisateur.

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

1. (a) Démontrer que (v_n) est une suite constante.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2. (a) En utilisant le résultat de la question **1.(b)**, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n < u_{n+1} < 15$$

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

(c) Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (*5 points*)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

On rappel que pour tout points distincts A et B d'affixes respectives z_A et z_B , on a :

$$\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$$

Démontrer que, pour tout point C et D d'affixes respectives z_C et z_D on a :

$$\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$$

Partie B

À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -z^2 + 2z$.

Le point M' est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$

   En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

2. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.

   On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.

   Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.

   (a) Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.

   (b) Sur la figure donnée en **annexe**, on a représenté un point M sur le cercle $\mathcal{C}$.

   Construire sur cette figure les points N et M' en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).

   (c) Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM' ?

Exercice 4 (*5 points*)

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.
2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.
3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$.

Partie B - Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A(1 ; 1), B$(-1;-1)$ et C(2 ; 5).

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C - Retour au cas général

Les nombres a, b, c, p, q, r sont des entiers.
Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points A$(1;p)$, B$(-1;q)$ et C$(2;r)$.
On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$. avec a, b et c entiers. alors

$$\begin{cases} -3p + q + 2r & \equiv & 0\ [6] \\ 3p - 3q & \equiv & 0\ [6] \\ 6p + 2q - 2r & \equiv & 0\ [6] \end{cases}$$

2. En déduire que $\begin{cases} q - r & \equiv & 0\ [3] \\ p - q & \equiv & 0\ [2] \end{cases}$.

3. Réciproquement, on admet que si $\begin{cases} q - r & \equiv 0\ [3] \\ p - q & \equiv 0\ [2] \\ \text{A, B, C ne sont pas alignés} & \end{cases}$
alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

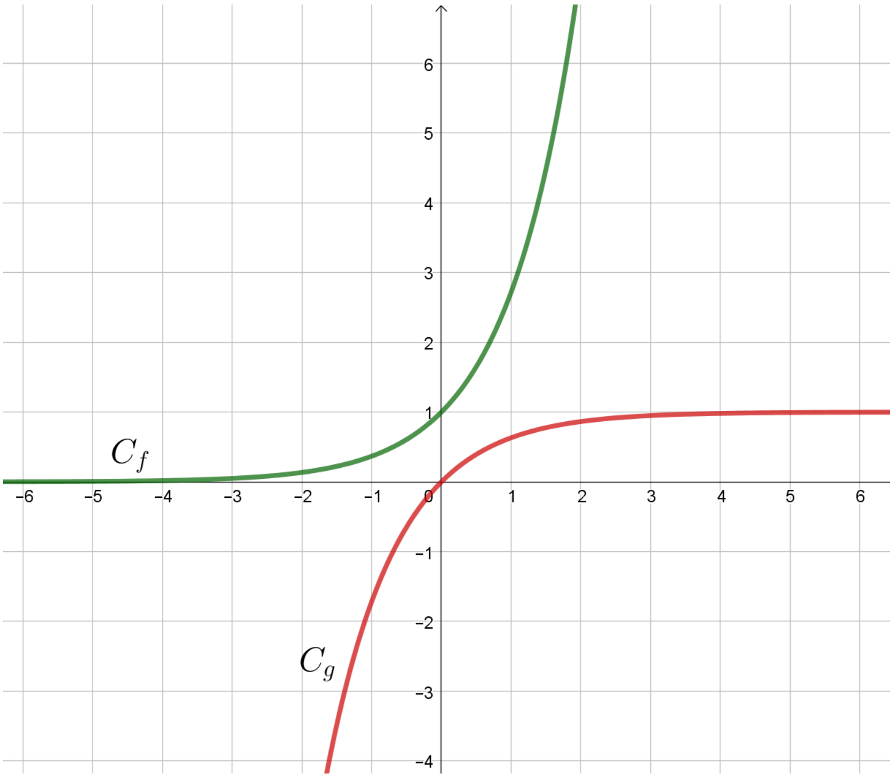
   a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.
   b. On choisit $p = 7$. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

NOM :………………………

Prénom :……………………

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1



Exercice 3