Corrigé du Bac Blanc

Exercice 1 (*5 points*) Asie Juin 2013 Extrait

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$

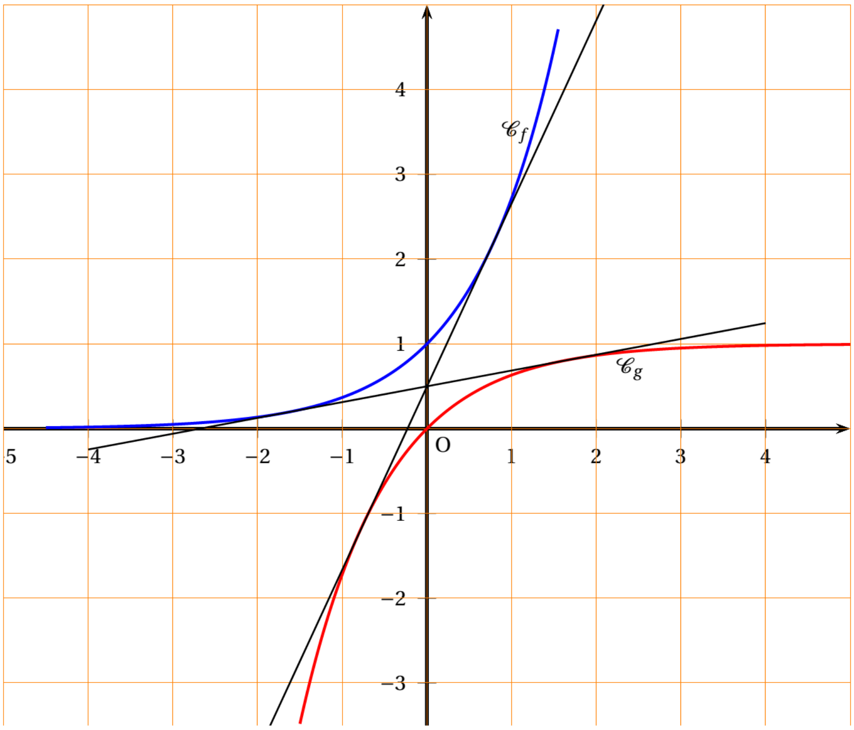
Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, sont fournies en annexe.

Partie A

Soit A un point de $\mathcal{C}_f$ et B un point de $\mathcal{C}_g$.

On suppose que l'on peut construire une droite passant par A et B qui soit à la fois tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A et tangente à $\mathcal{C}_g$ au point B ?

Tracer aux mieux cette tangente sur la figure de l'**annexe**.



Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de cette tangente commune que l'on note $\mathcal{D}$.

Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B d'abscisse b.

1. (a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égal à $f'(a)$.

Or $f'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $\boxed{f'(a) = \mathrm{e}^a}$.

(b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.

De même le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égal à $g'(b)$.

Or $g'(x) = -(-\mathrm{e}^{-x})$, donc $\boxed{g'(b) = \mathrm{e}^{-b}}$.

(c) En déduire que $b = -a$.

Si les deux tangentes sont égales le coefficient directeur de leurs équations réduites sont égaux, soit :
$f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^{-b} \Leftrightarrow a = -b \Leftrightarrow \boxed{b = -a}$.

2. Déterminer deux expressions de l'équation réduite de $\mathcal{D}$ puis en déduire que le réel a est solution de l'équation : $2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0$.

- Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A est égale à :
  $y - \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^a(x-a) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = x\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^a(1-a)}$.
- Une équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B est égale à :
  $y - (1-\mathrm{e}^{-b}) = \mathrm{e}^{-b}(x-b) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = x\mathrm{e}^{-b} + (1-\mathrm{e}^{-b} - b\mathrm{e}^{-b})}$.
  Ou en remplaçant $-b$ par a :
  $y = x\mathrm{e}^a + 1 - \mathrm{e}^a + a\mathrm{e}^a \Leftrightarrow y = x\mathrm{e}^a + \left(1 + \mathrm{e}^a(a-1)\right)$.

- Si les deux tangentes sont égales, leurs équations réduites sont les mêmes.
  On a déjà vu l'égalité des coefficients directeurs.
  Les ordonnées à l'origine sont aussi les mêmes soit :
  $\mathrm{e}^a(1-a) = 1 + \mathrm{e}^a(a-1) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^a(2-2a) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2(a-1)\mathrm{e}^a + 1 = 0$.
  Donc a est solution de l'équation dans $\mathbb{R}$: $2(x-1)\mathrm{e}^x + 1 = 0$.

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x + 1$.

1. (a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

- Sur $\mathbb{R}$, $\quad \varphi(x) = 2x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1$.

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$, d'où par somme de limite : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 1}$.
La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de φ.

- On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, d'où par somme de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty}$.

(b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.

Somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\varphi'(x) = 2\mathrm{e}^x + 2(x-1)\mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^x}$$

Comme, quel que soit $x \in \mathbb{R}$; $\quad \mathrm{e}^x > 0$, le signe de $\varphi'(x)$ est celui de x.
Donc sur $]-\infty; 0[$, $\varphi'(x) < 0$: la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle et sur $]0; +\infty[$, $\varphi'(x) > 0$: la fonction φ est strictement croissante sur cet intervalle.

(c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

Sur $]-\infty; 0]$ la fonction φ est continue et décroissante à valeurs dans $[-1; 1]$. Comme $0 \in [-1; 1]$ il existe, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, un réel unique α de $]-\infty; 0]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Le même raisonnement sur l'intervalle $[0; +\infty[$ montre qu'il existe un réel unique de cet intervalle β tel que $f(\beta) = 0$.
Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

(b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation. À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

La calculatrice donne :

$\varphi(-1{,}679) \approx 0{,}00041$ et $\varphi(-1{,}678) \approx -0{,}0002$, donc $-1{,}679 < \alpha < -1{,}678$.

Conclusion au centième près $\boxed{\alpha \approx -1{,}68}$.

De la même façon on obtient $\boxed{\beta \approx 0{,}77}$.

Exercice 2 (*5 points*) Nlle Calédonie Nov 2017

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.
On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.

La formule à saisir dans la cellule B4, puis à recopier vers le bas, permettant d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B est = **5*B3/4 - B2/4**

2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	6,75
5	3	6,938
6	4	6,984
7	5	6,996

3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers le nombre 7.

4. Ecrire un algorithme qui affiche le rang N pour lequel $u_N > 7 - m$ où m est une valeur positive inférieure à 1 entrèe par l'utilisateur.

$N \leftarrow 0$
$u \leftarrow 3$
$v \leftarrow 6$
$Saisir\ m$
$Tant\ que\ \ u \leq 7 - m\ \ \ faire:$
  $w \leftarrow \frac{5}{4}v - \frac{1}{4}u$
  $u \leftarrow v$
  $v \leftarrow w$
  $N \leftarrow N + 1$
Fin de tant que
Afficher N

et en **Python**

```python
rang=0
u,v=3,6
m=float(input('valeur de m'))
while u<=7-m:
    w=5/4*v-1/4*u
    u,v=v,w
    rang+=1
print(rang)
```

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

1. (a) Démontrer que (v_n) est une suite constante.

$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{4}\,u_{n+1} = \left(\frac{5}{4}\,u_{n+1} - \frac{1}{4}\,u_n\right) - \frac{1}{4}\,u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}\,u_n = v_n$

Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n$ donc la suite (v_n) est constante.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

La suite (v_n) est constante, donc pour tout n, $v_n = v_0 = u_1 - \frac{1}{4}\,u_0 = 6 - \frac{3}{4} = \frac{21}{4}$.

Donc, pour tout n, $u_{n+1} - \frac{1}{4}\,u_n = \frac{21}{4}$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{4}\,u_n + \frac{21}{4}$.

2. (a) En utilisant le résultat de la question **1.(b)**, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n < u_{n+1} < 15$$

Soit la propriété $u_n < u_{n+1} < 15$.

* **Initialisation**

$u_0 = 3$ et $u_1 = 6$ donc $u_0 < u_1 < 15$; la propriété est vraie pour $n = 0$.

* **Hérédité**

On suppose que pour $n \geq 0$, $u_n < u_{n+1} < 15$; c'est l'hypothèse de récurrence.

$u_n < u_{n+1} < 15 \iff \frac{1}{4}\,u_n < \frac{1}{4}\,u_{n+1} < \frac{15}{4} \iff \frac{1}{4}\,u_n + \frac{21}{4} < \frac{1}{4}\,u_{n+1} + \frac{21}{4} < \frac{15}{4} + \frac{21}{4}$ ce qui équivaut à $u_{n+1} < u_{n+2} < \frac{36}{4}$ et comme $\frac{36}{4} = 9 < 15$, on en déduit que $u_{n+1} < u_{n+2} < 15$ donc que la propriété est vraie au rang $n + 1$.

* **Conclusion**

On a vérifié que la propriété était vraie pour $n = 0$; on a démontré qu'elle était héréditaire pour $n \geq 0$. D'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

* On a démontré que pour tout n, $u_n < u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante.
* On a démontré que pour tout n, $u_n < 15$ donc la suite (u_n) est majorée.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Pour tout n, $w_n = u_n - 7$ donc $u_n = w_n + 7$.

* $w_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{4} u_n + \frac{21}{4} - 7 = \frac{1}{4}(w_n + 7) - \frac{7}{4} = \frac{1}{4} w_n + \frac{7}{4} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4} w_n$
* $w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$

Donc la suite (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = -4$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

On en déduit que, pour tout n, $w_n = w_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -4 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Or $u_n = w_n + 7$ donc, pour tout n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

(c) Calculer la limite de la suite (u_n).

$-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc, d'après les propriétés des limites des suites géométriques, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7$.

Exercice 3 (*5 points*) Métropole Réunion Sept 2017

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A (Dem de cours)

Partie B

À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -z^2 + 2z$.

Le point M' est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $-z^2 + 2z - 2 = 0$.

En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.

On résout dans l'ensemble C, $-z^2 + 2z - 2 = 0 \iff z^2 - 2z + 2 = 0 \iff$

$$(z-1)^2 - 1 + 2 = 0 \iff (z-1)^2 + 1 = 0 \iff (z-1)^2 = \mathrm{i}^2 \iff \begin{cases} z - 1 & = & \mathrm{i} \\ \text{ou} & & \\ z - 1 & = & -\mathrm{i} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z & = & 1 + \mathrm{i} \\ \text{ou} & & \\ z & = & 1 - \mathrm{i} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions complexes est donc $\{1 + \mathrm{i}\,; 1 - \mathrm{i}\}$.

Les points dont les images ont pour affixe 2, vérifient :

$z' = 2 \iff -z^2 + 2z = 2 \iff -z^2 + 2z - 2 = 0$: ce sont donc les points dont les affixes sont les solutions de l'équation ci-dessus.

Les points d'affixe $1 + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$ ont pour image le point d'affixe réelle 2.

2. Soit M un point d'affixe z et M' son image d'affixe z'.

On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.

Montrer que M est le milieu du segment $[NM']$.

On a donc $M(z)$, $M'(z' = -z^2 + 2z)$ et $N(z^2)$.

Or $\frac{z_N + z_{M'}}{2} = \frac{-z^2+2z+z^2}{2} = \frac{2z}{2} = z$, ce qui montre que M est le milieu du segment $[NM']$.

3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.

(a) Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.

Puisque $OM = 1$ et que l'un de ses arguments est θ, on sait que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Donc $|z| = 1$.
Donc $|z_N| = |z^2| = |z|^2 = 1^2 = 1$.
D'autre part on a $\arg(z_N) = \arg(z^2) = 2\arg(z) = 2\theta$.

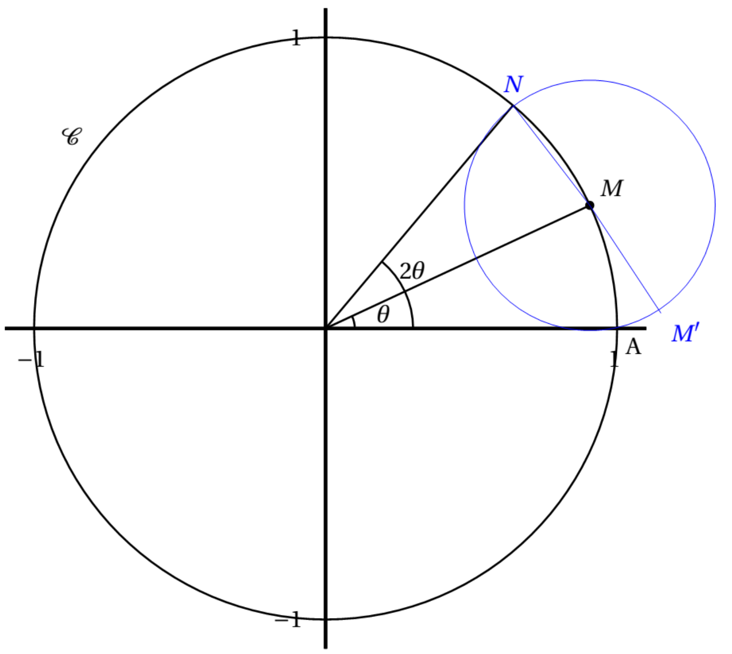
(b) Sur la figure donnée en **annexe**, on a représenté un point M sur le cercle $\mathcal{C}$.

Construire sur cette figure les points N et M' en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).

N appartient au cercle $\mathcal{C}$; on le construit avec le compas de telle sorte que $MA = MN$, A étant le point d'affixe 1.
Il suffit ensuite de construire le symétrique de N par rapport à M.

(c) Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM' ?

On a vu que $MN = MA = MM'$.
En particulier $MA = MM'$ montre que le triangle AMM' est isocèle en M.



Exercice 4 (*5 points*) Amérique du Nord Juin 2015

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Détaillons le calcul du coefficient $a_{1,1}$ de M^2 : $1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 4 = 6$.

2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.

On a $M^2 + 8M + 6I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ 8 & -8 & 8 \\ 32 & 16 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 12 & 20 & 21 \end{pmatrix} = M^3$

3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$.

On a donc :

$$\begin{aligned} M^3 = M^2 + 8M + 6I &\Leftrightarrow M^3 - M^2 - 8M = 6I \\ &\Leftrightarrow M(M^2 - M - 8I) = 6I \\ &\Leftrightarrow M \times \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I) = I \end{aligned}$$

Cette égalité montre que l'inverse de la matrice M est la matrice $\frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$.

Partie B - Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A(1 ; 1), B$(-1; -1)$ et C(2 ; 5).

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation de la parabole, d'où le système :

$$\begin{cases} a + b + c & = & 1 \\ a - b + c & = & -1 \\ 4a + 2b + c & = & 5 \end{cases} \Leftrightarrow \text{(matriciellement)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Le résultat précédent peut s'écrire : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Or l'inverse de M est $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Partie C - Retour au cas général

Les nombres a, b, c, p, q, r sont des entiers.

Dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points A$(1; p)$, B$(-1; q)$ et C$(2; r)$.

On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ avec a, b et c entiers alors $\begin{cases} -3p+q+2r & \equiv & 0\ [6] \\ 3p-3q & \equiv & 0\ [6]. \\ 6p+2q-2r & \equiv & 0\ [6] \end{cases}$

On a $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a & = & -\frac{1}{2}p\frac{1}{6}q+\frac{1}{3}r \\ b & = & \frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q \\ c & = & a+\frac{1}{3}q-\frac{1}{3r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a & = & -3p+q+2r \\ 6b & = & 3p-3q \\ 6c & = & 6p+2q-2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3p+q+2r & \equiv & 0 & [6] \\ 3p-3q & \equiv & 0 & [6] \\ 6p+2q-2r & \equiv & 0 & [6] \end{cases}$$

2. En déduire que $\begin{cases} q-r & \equiv & 0\ [3] \\ p-q & \equiv & 0\ [2] \end{cases}$.

$3p-3q \equiv 0 \quad [6] \Leftrightarrow 3(p-q) \equiv 0 \quad [6]$ ce qui signifie que $p-q$ doit être multiple de 2, soit $p-q \equiv 0 \quad [2]$.

Le double de la deuxième ligne du système ajoutée à la troisième donne :

$4q+2r \equiv 0 \quad [6] \Leftrightarrow 2(2q+r) \equiv 6 \quad [6]$, d'où $2q+r$ doit être multiple de 3, soit $2q+r \equiv 0 \quad [3]$.

Mais $2 \equiv -1 \quad [3]$ entraîne $2q \equiv -q \quad [3]$, donc

$$2q+r \equiv 0 \quad [3] \Leftrightarrow -q+r \equiv 0 \quad [3].$$

Finalement on a le système $\begin{cases} q-r & \equiv & 0 & [3] \\ p-q & \equiv & 0 & [2] \end{cases}$.

3. Réciproquement, on admet que si $\begin{cases} q-r & \equiv 0\ [3] \\ p-q & \equiv 0\ [2] \\ \text{A, B, C ne sont pas alignés} & \end{cases}$ alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ passe par les points A, B et C.

a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r+q-3p = 0$.

A,B et C alignés si et seulement si $C \in AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Or $\overrightarrow{AB}(-2\,;q-p)$ et $\overrightarrow{AC}(1;r-p)$. Donc :

$$\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & = & -2\alpha \\ r-p & = & \alpha(q-p) \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{-2} = \frac{r-p}{q-p} \Leftrightarrow$$
$$q-p = -2(r-p) \Leftrightarrow q-p = -2r+2p \Leftrightarrow 3p-q-2r = 0$$

b. On choisit $p = 7$. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2+bx+c$ passe par les points A, B et C.

On choisit $p = 7$, on a donc $7-q \equiv 0 \quad [2]$, on déduit que $q = 7+2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Or $q-r \equiv 0 \quad [3] \Leftrightarrow 7+2k-r \equiv 0 \quad [3]$, c'est-à -dire $r = 7+2k+3l$ avec $l \in \mathbb{Z}$.

Comme les points ne sont pas alignés :

$$\begin{aligned} 3p-q-2r \neq 0 &\Leftrightarrow 21-7-2k-14-4k-6l \neq 0 \\ &\Leftrightarrow -6k-6l \neq 0 \\ &\Leftrightarrow -6(k+l) \neq 0 \Leftrightarrow k+l \neq 0 \end{aligned}$$

Prenons simplement $k = l = 1$, d'où $q = 9$ et $l = 12$.

L'égalité $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ = permet de trouver $a = 2, \quad b = -1, \quad c = 6$.