

TP TICE : Centrer et réduire une binomiale

L'objectif de ce TP est de construire, à l'aide du logiciel Geogebra, le diagramme en bâtons d'une variable aléatoire X_n qui suit une loi binomiale, de la centrer puis de la réduire, et enfin de construire l'histogramme associé.

Partie I : Construction de X_n

Dans cette partie, nous allons représenter graphiquement la variable aléatoire X_n , qui suit la loi binomiale de paramètres n et p .

1. Ouvrir le logiciel GéoGébra.
2. Créer deux curseurs pour définir les paramètres n et p .
3. Construire en gris le diagramme en bâtons de la variable aléatoire X_n .

Pour cela, saisir la formule :

$$a = \text{Barres}[\text{Séquence}[k, k, 0, n], \text{Séquence}[\text{Binomiale}[n, p, k, \text{false}], k, 0, n], 0.2]$$

Partie II : Centrage

Dans cette partie, nous allons représenter graphiquement la variable aléatoire $X_n - m$, où $m = np$ est l'espérance de X_n . Cette variable aléatoire a donc une espérance nulle, c'est pour cette raison que l'on dit qu'elle est centrée.

1. Dans la zone de saisie, entrer la valeur de m .
2. Construire en marron le diagramme en bâtons de la variable aléatoire $X_n - m$.

Partie III : Réduction

Dans cette partie, nous allons représenter graphiquement la variable aléatoire $\frac{X_n - m}{\sigma}$

où $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ est l'écart-type de X_n . Cette variable aléatoire a donc une espérance nulle et un écart-type égal à 1, c'est pour cette raison que l'on dit qu'elle est centrée et réduite.

1. Dans la zone de saisie, entrer la valeur de σ .
2. Construire en rouge le diagramme en bâtons de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - m}{\sigma}$

Observer l'effet graphique de ce phénomène.

Pour les plus rapides

Partie IV : Vers la loi normale

1. **a.** On souhaite remplacer tous les bâtons de la distribution Z_n par des rectangles adjacents R_k avec $(0 \leq k \leq n)$ de largeur commune, dont chaque base (sur l'axe des abscisses) est centrée en z_k (comme les bâtons) et tels que pour chaque k , le rectangle R_k ait pour aire $p(Z = z_k)$

Cette construction s'appelle un histogramme.

Entrer en ligne de saisie :

Hist=Histogramme[Séquence[(k - a) / s - 0.5 / s, k, 0, n + 1, 1], Séquence[s Binomiale[n, p, k, false], k, 0, n, 1]]

où **a** est la moyenne et **s** l'écart-type.

Fixer $n = 100$ et $p = 0,5$. Afficher σ .

- b.** Quelle est la largeur commune des rectangles.

c. Lorsque n prend de grandes valeurs avec p fixé, que penser de la position et de la dispersion de l'histogramme ?

2. a. Tracer dans le même repère la courbe représentative C de la fonction $f: x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

b. Quel lien semble-t-il possible de formuler entre l'histogramme et la courbe C , lorsque n est assez grand ?

c. Fixer $n=400$ et $p=0.5$ puis proposer une démarche (avec utilisation de la courbe C) permettant de donner une estimation de $P(-0,5 \leq Z \leq 1)$.

d. Quelle est l'aire de la réunion de tous les rectangles ?

Quelques commandes Géogébra utiles :

Dans Geogebra 4, l'ensemble des commandes est disponible à droite de la ligne de saisie :



Cliquer ici pour afficher toutes les commandes.

- Suite ou liste :**

Séquence[<Expression>, <Variable>, <de>, <à>]

Ex : séquence[1/i,i,1,10] crée la liste $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{10}\}$

Rem : (ne pas oublier l'accent ...)

- Loi binomiale**

Binomiale[<Nombre d'essais>, <Probabilité du Succès>, <Nombre Succès>, <Booléen Cumul>]

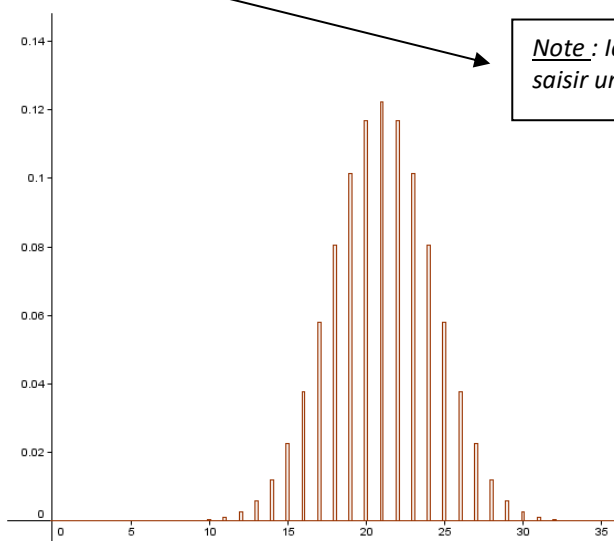
Ex : binomiale[20,0.5,4,0] correspond au calcul de $P(X=4)$ lorsque X suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=0.5$

binomiale[20,0.5,4,1] correspond au calcul de $P(X \leq 4)$ (probabilité cumulée)

- Diagramme en barres :**

Barres[<Liste Données>, <Liste Effectifs>, <Largeur Barres>]

Ex : Barres[Séquence[k, k, 0, n], Séquence[Combinaison[n, k] $p^k (1-p)^{n-k}$, k, 0, n], 0.2)
affiche pour $n=42$ et $p=0.5$

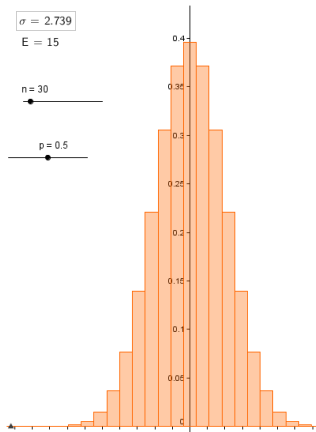


Note : Ici la largeur **constante** des barres est fixée à **0.2**. On peut saisir une autre valeur.

- **Histogramme :**

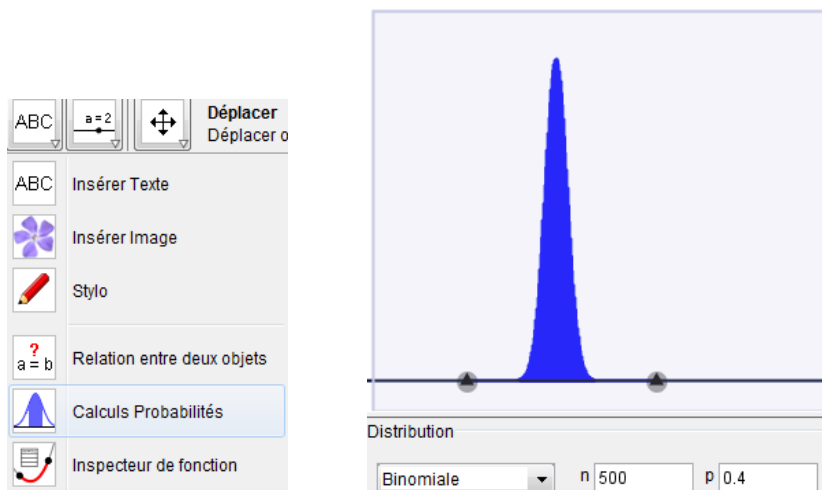
Histogramme[<Liste Bornes Classes>, <Liste Hauteurs>]

Ex : `histogramme[séquence[(i-E)/σ - 0.5, i, 0, n+1], séquence[σ * binomiale[n, p, k, false], k, 0, n]`
 affiche pour n=30, p=0.5, σ = 2.739 et E=15



Attention ce sont les bornes des classes et non les centres.
 Par ex, si 30 rectangles alors 31 bornes.

Pour observer des binomiales



Ou calculer des probabilités à l'aide de la loi normale.

