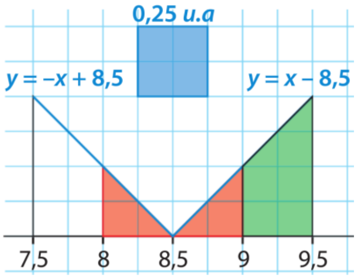
Lois de probabilité continues (ou à densité)

Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non).
Exemples : Le temps d'attente à un arrêt de bus ; la durée de vie d'un transistor ; la distance du point d'impact au centre d'une cible. On s'intéresse alors à des événements du type :
" X prend ses valeurs dans l'intervalle I " .

I. Définitions.

Exemple d'introduction :



Un entrepôt accueille tous les matins des camions de livraison sur un créneau de deux heures d'ouverture, de 7h30 à 9h30 .
On considère X la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'un camion qui se présente tous les matins à l'entrepôt aux heures d'ouverture.
On admet que la probabilité que ce camion arrive dans un intervalle de temps donné [t_1 ; t_2] est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, **les deux segments tracés ci-contre**, et les droites d'équations $x = t_1$ et $x = t_2$, parallèles à l'axe des ordonnées.
Ainsi, la probabilité d'arrivée du camion entre 8h00 et 9h00 est égale à l'aire colorée en rouge :

$$P([8;9]) = 0{,}25$$

celle qu'il arrive entre 9h et 9h30 est :

$$P([9;9{,}5]) = \int_9^{9{,}5}(x-8{,}5)\,dx = 0{,}375$$

Enfin, on vérifie (et c'est indispensable) que :

$$P([7{,}5;9{,}5]) = \int_{7{,}5}^{9{,}5}|x-8{,}5|\,dx = 1$$

Vocabulaire : La fonction $x \mapsto |x-8{,}5|$ est la **densité** permettant de définir la loi de probabilité, sur [7,5 ; 9,5], de l'heure d'arrivée à l'entrepôt.

Variable aléatoire continue

Une variable aléatoire X est dite continue lorsqu'elle peut prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle I de $\mathbb{R}$. On s'intéresse alors à des événements du type : « La valeur de X est comprise entre les réels a et b de I. Nous noterons $(a \le X \le b)$ un tel événement.

Densité de probabilité

On appelle **densité de probabilité** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, toute fonction f définie sur I et vérifiant les trois conditions suivantes :

- f est continue sur I sauf peut-être en un nombre fini de points ;
- f est positive sur I ;
- $\int_I f(x)dx = 1$ (l'aire sous la courbe de f est égale à 1).

Remarque : lorsque $I = [a\,;+\infty[$ par exemple, la dernière condition s'écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt = 1$.

Exemples : Dans chacun des cas suivant, dire si la fonction f est une densité de probabilité sur l'intervalle I :

a. $f : x \mapsto 2-x$, $I=[0;3]$

b. $f : t \mapsto 3t^2$, $I=[0;1]$

c. $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}$, $I=[2;4]$

d. $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2}$, $I=[1;2]$

→ Exercices n°28 – 29 et 30 page 382

Loi de probabilité à densité

On définit la loi de probabilité P de densité f sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ en posant, pour tous réels a et b de I avec $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Autres notations possibles :

$P(a \leq X \leq b)$ est aussi noté $P_X([a\,;b])$ ou simplement $P([a\,;b])$.

$P(X \geq a)$ est aussi noté $P([a\,;+\infty[)$.

Exemples : Déterminer le réel k pour que la fonction f soit une densité de probabilité sur I, puis calculer $P([2\,;3])$.

e. $f : x \mapsto k$, $I = [1\,;9]$

f. $f : t \mapsto kt^2$, $I = [0\,;3]$

g. $f : t \mapsto kt$, $I = [2\,;4]$

h. $f : x \mapsto \dfrac{k}{x}$, $I = [1\,;e^2]$

Propriétés

1. La probabilité de la réunion d'un nombre fini quelconque d'intervalles de I disjoints deux à deux est égale à la somme des probabilités de ces intervalles.
Ainsi si $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, $\mathrm{K} \subset \mathrm{I}$ et $\mathrm{J} \cap \mathrm{K} = \varnothing$ alors $P(\mathrm{J} \cap \mathrm{K}) = 0$ et $P(\mathrm{J} \cup \mathrm{K}) = P(\mathrm{J}) + P(\mathrm{K})$.

2. La probabilité que X prenne une valeur isolée de I est nulle.
En effet, pour tout réel a de I : $P(X = a) = P([a\,;a]) = \int_a^a f(x)dx = 0$.

3. On en déduit que pour tous réels a et b de I, avec $a \leq b$:

$$P([a\,;b]) = P([a\,;b[) = P(]a\,;b]) = P(]a\,;b[)$$

$$P(X > a) = P(X \geq a), \text{ etc.}$$

4. Si $\overline{[a\,;b]}$ désigne le complémentaire de $[a\,;b]$ dans I, alors $P\left(\overline{[a\,;b]}\right) = 1 - P([a\,;b])$.

5. Si J et K sont des intervalles inclus dans I avec $P(\mathrm{K}) \neq 0$ alors $P_{\mathrm{K}}(\mathrm{J}) = \dfrac{P(\mathrm{K} \cap \mathrm{J})}{P(\mathrm{K})}$

→ Exercices n°31 à 37 page 382

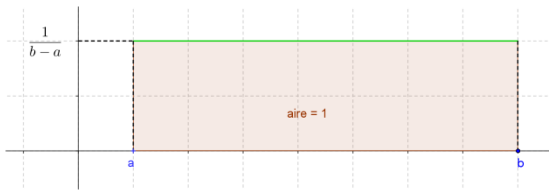
II. Loi uniforme

Si l'on choisit au hasard un nombre dans l'intervalle I = [a ; b], on conçoit que la probabilité que ce nombre soit dans le sous intervalle J est le quotient de la longueur J par celle de I.
Ou encore : la probabilité $P(X \in [c\,;\,d])$ est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle [c ; d].

1. Définition

Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur l'intervalle [a ; b], lorsque sa densité de probabilité f est la fonction constante définie sur [a ; b] par :

$$f : t \mapsto \frac{1}{b-a} .$$



- *Conséquence*

Pour tout intervalle J = [c ; d] avec $a \le c \le d \le b$,

$$P(X \in J) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_c^d dx = \frac{d-c}{b-a} .$$

Ainsi $\boxed{P(X \in J) = \dfrac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}}$

- *Remarque*

Si J et K sont deux intervalles de même longueur inclus dans I, alors $P(X \in J) = P(X \in K)$. D'où le nom de loi uniforme.

- *Exemple*

Le choix au hasard d'un nombre réel dans l'intervalle $[0\,;1]$ est modélisé par une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;1]$.

2. Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle fermé [a ; b] est :

$$\boxed{E(X) = \int_a^b x\, f(x)dx}$$

Théorème

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [a ; b].

Alors, son espérance mathématique est $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Démonstration : [redacted] .

→ **Exercices n°3 et 4 page 367**
→ **Exercices n°38 à 43 page 382**

III. Loi exponentielle

1. Modèle : loi de durée de vie sans vieillissement

Prenons un exemple : notons X la variable aléatoire qui donne la durée de vie, en année, d'un composant électronique. *A priori,* X prend ses valeurs dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Pour tout t de $[0\,;+\infty[$, « $X \geq t$ » est l'événement « La durée de vie dépasse *t* années ».

On dit que la durée de vie de ce composant est sans vieillissement lorsque la probabilité qu'il fonctionne encore *h* années supplémentaires sachant qu'il fonctionne à l'instant *t* ne dépend pas de *t.*

Cela se traduit par : la probabilité conditionnelle $P_{X\geq t}\left(X \geq t+h\right)$ ne dépend pas de t.

Cette probabilité est donc égale, en particulier, à $P_{X\geq 0}\left(X \geq h\right)$, probabilité obtenue pour t = 0.

Or : $P_{X\geq 0}\left(X \geq h\right)=\dfrac{P\left(X \geq h \;\text{ et }\; X \geq 0\right)}{P\left(X \geq 0\right)}$ par définition,

« $X \geq 0$ » est l'événement certain donc $P(X \geq 0) = 1$ et « $X \geq h$ et $X \geq 0$ » est aussi l'événement « $X \geq h$ ».

Donc, $P_{X\geq 0}\left(X \geq h\right)=P\left(X \geq h\right)$.

Ainsi, pour tous nombres $t \geq 0$ et $h \geq 0$, $P_{X\geq t}\left(X \geq t+h\right)=P\left(X \geq h\right)$.

Nous dirons par définition :

Une variable aléatoire à valeurs positives X suit une loi sans vieillissement (ou sans mémoire) lorsque pour tous nombres positifs *t* et *h*,

$$P_{X\geq t}\left(X \geq t+h\right)=P\left(X \geq h\right).$$

Exemple : Si la durée de vie X d'un composant électronique est sans vieillissement, la probabilité que sa durée de vie dépasse dix ans sachant qu'il a déjà fonctionné sept ans est $P_{X\geq 7}\left(X \geq 10\right)$,

soit, avec $t = 7$ et $h = 3$, $P_{X\geq 7}\left(X \geq 7+3\right)=P\left(X \geq 3\right)$.

Autrement dit, le composant fonctionne « sans mémoire » des sept années passées.

2. Loi exponentielle de paramètre λ > 0

Définition

Soit λ un réel strictement positif.

On appelle ***loi exponentielle de paramètre*** λ la loi de probabilité dont la densité f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\lambda\, e^{-\lambda x}$

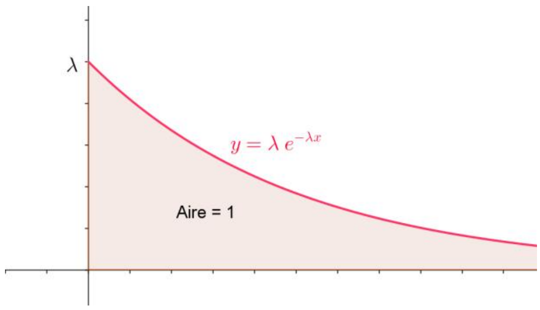
Remarque

On peut vérifier que f est bien une densité de probabilité sur $[0\,;+\infty[$.

En effet :

- la fonction f est continue et positive sur $[0\,;+\infty[$
- et pour tout nombre positif *a*,

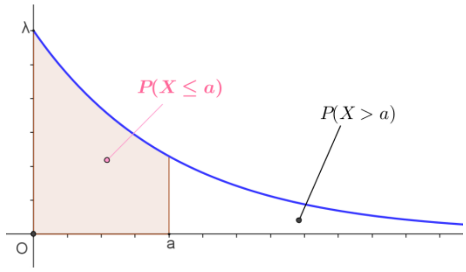
$\int_0^a \lambda\, e^{-\lambda x}dx=\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a=-e^{-\lambda a}+1$ donc $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a f(x)dx=1$ signifie que l'aire sous la courbe de *f* sur $[0\,;+\infty[$ est égale à 1.



Conséquences
Pour tous nombres a et b tels que $0 \leq a \leq b$:

- $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = 1 - e^{-\lambda a}$ soit $\boxed{P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}}$

- « X > a » est l'évènement contraire de « X ≤ a » donc $\boxed{P(X > a) = e^{-\lambda a}}$



- $P(X \in [a\,;b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$ soit $\boxed{P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}$

Théorème

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ > O.
Alors, la loi de X est **sans vieillissement** (ou sans mémoire) c'est-à-dire que pour tous nombres positifs t et h,

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$$

Démonstration :

$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \dfrac{P(X \geq t \text{ et } X \geq t + h)}{P(X \geq t)} = \dfrac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)}$.

Or $P(X \geq t + h) = e^{-\lambda(t+h)}$ et $P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$ donc $\dfrac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)} = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \dfrac{e^{-\lambda t} e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X \geq h)$.

Finalement $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$.

Remarque
On admet que réciproquement, les variables aléatoires à densité sans vieillissement suivent une loi exponentielle.
Ainsi, les variables aléatoires qui suivent une loi exponentielle sont les seules variables aléatoires à densité sans vieillissement.

3. Espérance mathématique

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.
Sa densité f est définie sur $[0\,;+\infty[$. On définit alors l'espérance mathématique de X par la limite suivante (lorsqu'elle existe) :

$$\boxed{E(X) = \lim_{a \to +\infty} \int_0^a x f(x) dx}$$

Théorème

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ > O.

Alors, son espérance mathématique est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Démonstration :
f désigne la densité de la loi exponentielle de paramètre λ.
La fonction $g : t \mapsto t\,f(t)$ est continue sur tout intervalle $[0\,;x]$, avec $x > 0$, donc elle admet des primitives sur cet intervalle.
Comme, pour tout réel t positif, on a : $(te^{-\lambda t})' = e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}$ soit : $t\lambda e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} - (te^{-\lambda t})'$
Ainsi :

$$\int_0^x g(t)dt = \int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}dt = \int_0^x e^{-\lambda t}dt - \int_0^x (te^{-\lambda t})'dt$$

$$= \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x - \left[te^{-\lambda t}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - xe^{-\lambda x}$$

Donc $E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x g(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - xe^{-\lambda x} \right) = \frac{1}{\lambda}$

<u>Méthode :</u> Utiliser la durée de vie sans vieillissement

La durée de vie, exprimée en heures, d'un petit composant électronique d'une carte d'anniversaire musicale est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0035$.
Sachant qu'un composant testé a fonctionné plus de 200 heures, calculer la probabilité qu'il tombe en panne avant 300 heures.
Calculer la durée moyenne de vie d'un composant électronique.

$$P_{X \geq 200}\left(X \leq 300\right) = 1 - P_{X \geq 200}\left(X > 300\right)$$

$$= 1 - P_{X \geq 200}\left(X > 200 + 100\right)$$

Donc d'après la loi de durée de vie sans vieillissement, on a :

$$P_{X \geq 200}\left(X \leq 300\right) = 1 - P\left(X > 100\right)$$

$$= P\left(X \leq 100\right)$$

$$= 1 - e^{-0{,}0035 \times 100}$$

$$\approx 0{,}3$$

$$E(X) = \frac{1}{0{,}0035} \approx 286 \text{ heures.}$$

→ Exercices n°5 à 9 page 369
→ Exercices n°44 à 52 page 384