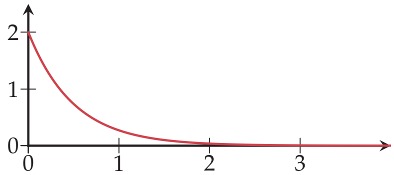
Lois exponentielles

30 ► MÉTHODE 2 p. 363

Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre 0,3. Calculer :

1) $P(X \in [0\,;\,2])$
2) $P(X \in [1\,;\,+\infty[)$
3) $P(5 < X < 10)$
4) $P(X \in [5\,;\,10])$

31 Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. La courbe de la fonction densité correspondante est donnée ci-dessous. Le point de coordonnées $A(0\,;\,2)$ appartient à cette courbe.



1) Déterminer la valeur de λ.
2) L'égalité $P(X < 0{,}5) = P(X \geqslant 0{,}5)$ est-elle vraie ?
3) Déterminer la valeur de t pour laquelle $P(X < t) = P(X \geqslant t)$.

32 ► MÉTHODE 3 p. 363

Une variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Sachant que $P(Y > 30) = 0{,}2$, déterminer λ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
2) On considère maintenant $\lambda = 0{,}05$. Calculer :
  a) $P(Y \geqslant 15)$
  b) $P(Y \geqslant 5)$
  c) $P_{(Y \geqslant 15)}(Y \geqslant 20)$
  d) $E(Y)$

33 Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ. On sait que $E(X) = 45$.

1) Déterminer la valeur de λ arrondie au millième.
2) A-t-on $P(X \geqslant 45) = 0{,}5$?

34 Dans le magasin où elle va retirer ses colis commandés sur Internet, Tessa sait qu'elle attend en moyenne 4 minutes. On sait que la durée d'attente en minute peut être modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Déterminer la valeur de λ.
2) Tessa vient retirer un colis. Calculer la probabilité :
  a) que Tessa attende moins de 2 minutes ;
  b) que Tessa attende plus de 5 minutes.
3) Tessa a déjà attendu 3 minutes. Quelle est la probabilité qu'elle attende au moins 2 minutes de plus ?

35 **Durée de vie d'un composant**

Un composant électronique d'un robot a une durée de vie, en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Une étude statistique a permis d'établir que $P(T < 5) = 0{,}1$.

On arrondira tous les résultats au millième.

1) Déterminer la valeur de λ.

Dans la suite, on prendra $\lambda = 0{,}02$.

2) Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure ou égale à 14 ans.
3) Calculer la probabilité que ce composant ait une durée de vie inférieure ou égale à 10 ans.
4) Sachant que le composant a déjà fonctionné 7 ans, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure ou égale à 21 ans ?
5) Donner une estimation de la durée de vie moyenne de ce composant.

36 **Carbone 14**

La durée de vie, en années, d'un atome radioactif peut être modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

On appelle demi-vie de cet élément le nombre réel T tel que la probabilité que cet atome se désintègre avant T années soit égale à 0,5.

Ainsi, la demi-vie du carbone 14 est 5 730 ans.

1) Calculer le paramètre λ dans le cas du carbone 14.
2) Calculer la probabilité qu'un atome de carbone 14 se désintègre :
  a) avant 1 000 ans ;
  b) après 10 000 ans.
3) Déterminer la valeur de a telle que $P(D < a) = 0{,}95$ pour le carbone 14.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

37 Un magasin vend des jeux électroniques.

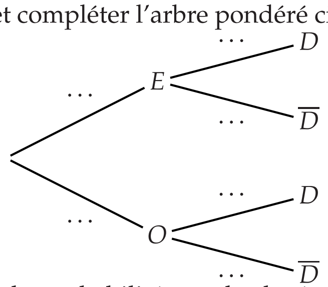
On admet que ces jeux ont une durée de vie en heure modélisée par la variable aléatoire D suivant la loi exponentielle de paramètre 0,000 1.

1) Calculer la probabilité que le jeu ait une durée de vie inférieure ou égale à 5 000 heures.
2) Sachant que le jeu a déjà fonctionné 1 000 heures, quelle est la probabilité qu'il fonctionne plus de 8 000 heures ?

38 Dans un lycée, les oscilloscopes utilisés en physique-chimie ont une durée de vie, en année, modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

On sait que la probabilité qu'un oscilloscope fonctionne plus de 8 ans est égale à 0,383.

1) Déterminer le paramètre λ. On arrondira à 10^{-4}.
   Dans la suite on prendra $\lambda = 0{,}12$.
2) Interpréter et déterminer la probabilité $P(X \geqslant 3)$.
3) Interpréter et déterminer la probabilité $P_{X>2}(X > 10)$.
4) Donner une estimation de la durée de vie moyenne d'un oscilloscope.
5) Désirant changer son parc de matériel, le lycée achète 40 % d'oscilloscopes auprès du fournisseur Oscillo' et le reste auprès du magasin Electro'. Les deux fabricants ayant des productions différentes, les durées de vie moyenne des oscilloscopes qu'ils fournissent sont de 8 ans pour Oscillo' et de 5 ans pour Electro'. On admet toujours que les durées de vie des oscilloscopes sont modélisées par des variables aléatoires suivant des lois exponentielles.
   Un professeur de physique-chimie prend au hasard un oscilloscope.
   On note E, O et D les événements respectifs « l'appareil vient du fournisseur Electro' », « l'appareil vient du fournisseur Oscillo' » et « l'appareil fonctionne plus de dix ans »
   a) Quelle est la probabilité que l'oscilloscope choisi fonctionne plus de 10 ans sachant qu'il vient du fournisseur Oscillo' ?
   b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



   c) Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'oscilloscope choisi soit supérieure ou égale à 10 ans ?
   d) Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'entreprise Electro' sachant que sa durée de vie est supérieure ou égale à 10 ans ?

39 Dans un circuit imprimé, un composant électronique a une durée de vie en années qui peut être modélisée par une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 0,125.

1) Un fabricant de circuit imprimé achète 1 000 composants électroniques et on suppose que les durées de vie des composants sont indépendantes.
   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de composants électroniques qui auront une durée de vie inférieure ou égale à 1 an.
   a) Quelle loi suit X ? Préciser ses paramètres (si nécessaire, on arrondira à 10^{-2} près).
   b) Calculer $P(X \leqslant 100)$.
2) Ce composant électronique est vendu 10 euros. Le fabricant propose aux clients la grille de remboursement suivante en cas de problème avec un composant :

Durée de vie	jusqu'à 2 ans	entre 2 et 4 ans	plus de 4 ans
Remboursement	5 €	3 €	0 €

   Calculer une estimation de la recette moyenne (qui tient compte du prix de vente et du remboursement) d'un composant si le fabricant en vend une grande quantité.

40 **D'après Bac (Centres Étrangers - 2003)**

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.

Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce que survienne un incident et on admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement. Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

1) Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
   a) comprise entre 50 et 100 km ;
   b) supérieure à 300 km.
2) Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas au cours des 25 prochains kilomètres ?