Durée : 4 h (ou 3h)

OBLIGATOIRE

et

SPÉCIALITÉ

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en réserve marine ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année:

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1520$.
(b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
(c) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.
(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.
(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2000.

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 3000$
Tant que ...
  $n \leftarrow \cdots$
  $u \leftarrow \cdots$
Fin de Tant que

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

Exercice 2 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : ROC

On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$où a , b , a' et b' sont des nombres réels. $\bar{z}$ est le conjugué de z.
On suppose connus les résultats suivants :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.
2. Montrer que, pour $z' \neq 0$,

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$$

En déduire que

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$$

Partie B

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O\,; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère l'équation
(E): $z^2 - 6z + c = 0$ où c est un réel strictement supérieur à 9.
   (a) Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.
   (b) Justifier que les solutions de (E) sont $z_{\text{A}} = 3 + i\sqrt{c - 9}$ et $z_{\text{B}} = 3 - i\sqrt{c - 9}$.

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_{A} et z_{B}.
Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.
3. a) Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.
b) En déduire les coordonnées du point D tel que $OADB$ soit un carré.

Exercice 3 (5 points)

Dans un pays, une épidémie touche 10% de la population. Un test de dépistage de la maladie a été mis au point mais il n'est pas parfait :

- si un individu n'est pas touché par la maladie, le test est tout de même positif dans 1 % des cas ;
- si un individu est touché par la maladie, le test est tout de même négatif dans 0,1 % des cas.

On considère les évènements suivants :

- M : « l'individu est touché par la maladie »
- T : « le test est positif »

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Toute la population passe le test de dépistage et on décide de donner un traitement à tous les individus ayant un test positif.
   a) Calculer $P(M \cap T)$ et donner une interprétation concrète de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   b) Montrer que le traitement est donné à 10,89 % de la population.
   c) À quel pourcentage de la population le traitement est-il donné à tort ?

3. On tire un échantillon de 100 individus dans la population, ce tirage étant assimilable à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'individus suivant un traitement.

- ***a)*** Quelle est la loi suivie par X ?
- ***b)*** Quelle est la probabilité que 10 individus exactement soient sous traitement ?
- ***c)*** Quelle est la probabilité que 5 individus ou moins soient sous traitement ?
- ***d)*** Chaque traitement coûte 1,90 €. Quel est l'investissement moyen à prévoir pour cet échantillon.

Exercice 4 de Spécialité (5 points)

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Trouver un entier naturel qui, dans la division euclidienne par 23, a pour reste 1 et, dans la division euclidienne par 17, a le même quotient et pour reste 13.

Partie B

n est un entier naturel. Démontrer que quel que soit n, $3n^4 + 5n + 1$ n'est jamais divisible par $n(n + 1)$.

Partie C

Vérifier que $2^4 \equiv -1$ [17] et $6^2 \equiv 2$ [17].

Quel est le reste de la division euclidienne par 17 des nombres 1532^{20} et 346^{12} ?

Partie D

On pose $A_n = n^5 - n$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer, sans utiliser de congruences, que A_n est pair.
2. En utilisant les congruences modulo 5, démontrer que A_n est divisible par 5.
3. Pourquoi A_n est-il divisible par 10 ?

Question Bonus (obligatoire et spécialité)

Montrer que le nombre 1,232323232323… peut s'écrire comme quotient de deux entiers naturels que l'on précisera.