Corrigé du DS n°1

Exercice 1 (5 points) Antilles Juin 2018

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en réserve marine ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année:

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2926$.

L'effectif de cétacés au 31 octobre 2017 est de $3000 + 80$, c'est-à -dire 3080. Entre le 1er novembre et le 31 mai, une baisse de 5 % a lieu, l'effectif au 1er juin 2018 est donc:

$$u_1 = 3080 - 5\% \times 3080 = 3080 \times 0{,}95 = 2926$$

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$.

En généralisant, on a, pour tout entier naturel n:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + 80) \times 0{,}95 \\ &= 0{,}95u_n + 80 \times 0{,}95 \\ &= 0{,}95u_n + 76 \end{aligned}$$

3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

Formule à entrer dans la cellule C2: **= 0.95*B2 + 76** .

4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1520$.

- **Initialisation**.
  On a $u_0 = 3000 \geq 1520$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité.**
  Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geq 1520$. Démontrons alors que $u_{n+1} \geq 1520$.
  Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1520$, donc, en multipliant membre à membre par 0,95:
  $$0{,}95u_n \geq 0{,}95 \times 1520$$
  puis, en ajoutant membre à membre 76:
  $$0{,}95u_n + 76 \geq 0{,}95 \times 1520 + 76$$
  ce qui équivaut à :
  $$u_{n+1} \geq 1520$$
  ce qu'il fallait démontrer. La propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 1520$.

(b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors:

$$u_{n+1} - u_n = 0{,}95u_n + 76 - u_n = -0{,}05u_n + 76$$

D'après la question précédente, $u_n \geq 1520$, donc $-0{,}05u_n \leq -0{,}05 \times 1520$, c'est-à -dire $-0{,}05u_n \leq -76$, par conséquent, $-0{,}05u_n + 76 \leq 0$, c'est-à -dire $u_{n+1} - u_n \leq 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante .

(c) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

La suite (u_n) est décroissante, minorée, elle est donc convergente.

5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1520 \\ &= 0{,}95u_n + 76 - 1520 \\ &= 0{,}95u_n - 1444 \\ &= 0{,}95\left(u_n - \frac{1444}{0{,}95}\right) \\ &= 0{,}95(u_n - 1520) \\ &= 0{,}95v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,95.

Son premier terme est $v_0 = u_0 - 1520 = 1480$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = 1480 \times 0{,}95^n$.

Et comme $v_n = u_n - 1520$, on en déduit que $u_n = v_n + 1520$, ce qui donne bien

$$u_n = 1480 \times 0{,}95^n + 1520.$$

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

$-1 < 0{,}95 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}95^n = 0$, on en déduit, par opérations sur les limites que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1520$.

6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que u ≥ 2000
    n ← n + 1
    u ← 0,95 × u + 76
```

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

La limite de la suite (u_n) est 1520 qui est inférieur à 2000, donc la réserve fermera un jour.

Pour déterminer l'année de fermeture, on peut programmer l'algorithme précédent.

C'est donc la 22ème année que la réserve fermera, soit en 2039.

Exercice 2 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : ROC

On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$où a , b , a' et b' sont des nombres réels. $\bar{z}$ est le conjugué de z.
On suppose connus les résultats suivants :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$. Correction dans le cours

2. Montrer que, pour $z' \neq 0$,

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$$ Correction dans le cours

En déduire que

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$$ Correction dans le cours

Partie B

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. On considère l'équation
(E): $z^2 - 6z + c = 0$ où c est un réel strictement supérieur à 9.
(a) Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4c < 0$ car $c > 9$ donc (E) admet deux solutions complexes non réelles

(b) Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + \mathrm{i}\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - \mathrm{i}\sqrt{c-9}$.

Les solutions de (E) sont conjuguées de la forme $z_1 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1}$

$$z_1 = \frac{6+\mathrm{i}\sqrt{4c-36}}{2} = \frac{6+2\mathrm{i}\sqrt{c-9}}{2} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{c-9} = z_A \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \overline{z_A} = z_B$$

2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B.
Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.
$OB = |z_B| = |\overline{z_A}| = |z_A| = OA$: OAB est donc bien isocèle en O

3. a) Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

OAB est rectangle en O si et seulement si $AB^2 = 2OA^2$ car on sait qu'il est isocèle en O

$$AB^2 = |z_B - z_A|^2 = \left|2\mathrm{i}\sqrt{c-9}\right|^2 = 4(c-9) \quad \text{et} \quad 2OA^2 = 2|z_A|^2 = 2 \times (9 + c - 9) = 2c$$

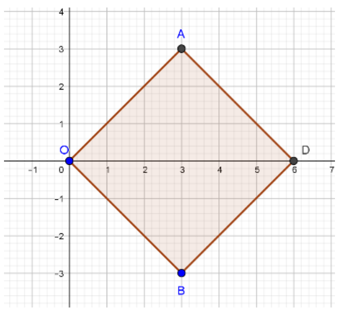
$$AB^2 = 2OA^2 \iff 4(c-9) = 2c \iff c = 18$$

OAB est donc rectangle si et seulement si $c = 18$

b) En déduire les coordonnées du point D tel que $OADB$ soit un carré.

Restons dans l'esprit de l'exercice !

OAB est rectangle isocèle lorsque $c = 18$. Il faut donc de plus que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BD}$.
On sait que $z_A = 3 + i\sqrt{18-9} = 3 + 3i$ donc $\overrightarrow{OA}(3+3i)$.
$\overrightarrow{BD}(z_D - z_B)$ *alors* $z_D - z_B = z_D - (3 - 3i)$
$= z_D - 3 + 3i$
$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BD} \iff 3 + 3i = z_D - 3 + 3i$
$\iff z_D = 6$
On peut donc en déduire que les coordonnées de D sont $(6\,;0)$.



Exercice 3 (5 points)

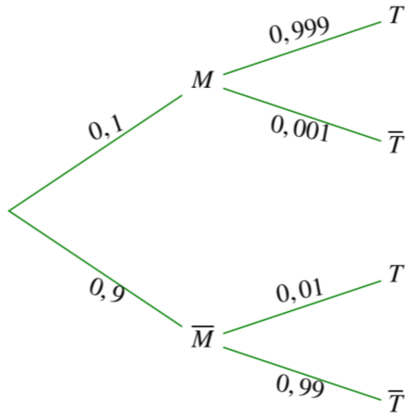
Dans un pays, une épidémie touche 10% de la population. Un test de dépistage de la maladie a été mis au point mais il n'est pas parfait :

- si un individu n'est pas touché par la maladie, le test est tout de même positif dans 1 % des cas ;
- si un individu est touché par la maladie, le test est tout de même négatif dans 0,1 % des cas.

On considère les évènements suivants :

- M : « l'individu est touché par la maladie »
- T : « le test est positif »

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.



2. Toute la population passe le test de dépistage et on décide de donner un traitement à tous les individus ayant un test positif.

a) Calculer $P(M \cap T)$ et donner une interprétation concrète de ce résultat dans le contexte de l'exercice.

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}1 \times 0{,}999 = 0{,}0999$$

Cela signifie que, au sein de la population, 9,99 % sont des individus touchés par la maladie et ayant un test positif.

b) Montrer que le traitement est donné à 10,89 % de la population.

Le traitement est donné lorsque le test est positif. Calculons alors $P(T)$.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) \\ &= 0{,}0999 + 0{,}9 \times 0{,}01 = 0{,}1089 \end{aligned}$$

Le traitement est donc bien donné à 10,89 % de la population.

c) À quel pourcentage de la population le traitement est-il donné à tort ?

Ce qui signifie que l'individu n'est pas malade mais ayant un test positif soit $P(\overline{M} \cap T)$.

$$P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0{,}9 \times 0{,}01 = 0{,}009$$

Soit 0,9 % de la population.

Remarque : Le calcul $10{,}89 - 10$ ne convient pas car les 10 % de malades ne sont pas tous dans les 10,89 % trouvés (il y a des faux négatifs).

3. On tire un échantillon de 100 individus dans la population, ce tirage étant assimilable à un tirage avec remise. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'individus suivant un traitement.

a) Quelle est la loi suivie par X ?

On répète 100 fois de manière indépendante une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles dont la probabilité du succès est égale à 0,1089 donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}1089$.

On a alors pour $0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = \binom{100}{k} 0{,}1089^k \times (1 - 0{,}1089)^{100-k}$

b) Quelle est la probabilité que 10 individus exactement soient sous traitement ?

$$P(X = 10) = \binom{100}{10} 0{,}1089^{10} \times (1 - 0{,}1089)^{90} \approx 0{,}1264$$

c) Quelle est la probabilité que 5 individus ou moins soient sous traitement ?

On cherche $P(X \leq 5)$.

$$P(X \leq 5) \approx 0{,}0325$$

d) Chaque traitement coûte 1,90 €. Quel est l'investissement moyen à prévoir pour cet échantillon.

Sur cet échantillon, le nombre de patients traité en moyenne est donné par :

$$E(X) = n \times p = 100 \times 0{,}1089 = 10{,}89$$

Comme chaque traitement coûte 1,90 €, l'investissement moyen à prévoir pour cet échantillon est égal à :

$$10{,}89 \times 1{,}90 = 20{,}691 \text{ €}$$

Exercice 4 de Spécialité (5 points)

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Trouver un entier naturel qui, dans la division euclidienne par 23, a pour reste 1 et, dans la division euclidienne par 17, a le même quotient et pour reste 13.

On cherche n entier naturel tel que :

$$\begin{cases} n = 23q + 1 \\ n = 17q + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 23q + 1 \\ 23q + 1 = 17q + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 23q + 1 \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 47 \\ q = 2 \end{cases}$$

Finalement $n = 47$

Partie B

n est un entier naturel. Démontrer que quel que soit n, $3n^4 + 5n + 1$ n'est jamais divisible par $n(n + 1)$.

- $n(n + 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs donc le produit d'un pair et d'un impair : le produit est donc pair.
- Si n est pair alors $3n^4 + 5n = n(3n^3 + 5)$ est donc pair et, par conséquent, $3n^4 + 5n + 1$ est impair.

  Si n est impair, $n \equiv 1\ [2]$ donc $3n^4 + 5n + 1 \equiv 3 \times 1 + 5 \times 1 + 1\ [2] \equiv 9[2] \equiv 1[2]$ donc $3n^4 + 5n + 1$ est impair.

Conclusion : $3n^4 + 5n + 1$ est impair alors que $n(n + 1)$ est pair, par conséquent, $3n^4 + 5n + 1$ n'est jamais divisible par $n(n + 1)$.

Partie C

Vérifier que $2^4 \equiv -1\ [17]$ et $6^2 \equiv 2\ [17]$.

Quel est le reste de la division euclidienne par 17 des nombres 1532^{20} et 346^{12} ?

- $2^4 = 16 = 1 \times 17 - 1 \equiv -1\ [17]$ et $6^2 = 36 = 2 \times 17 + 2 \equiv 2\ [17]$
- $1532 = 17 \times 90 + 2$ donc $1532 \equiv 2\ [17]$ d'où $1532^{20} \equiv 2^{20}\ [17]$
  De plus $2^{20} = (2^4)^5$ donc $2^{20} \equiv (-1)^5\ [17] \equiv -1\ [17] \equiv 16\ [17]$
  Le reste de la division euclidienne par 17 de 1532^{20} est donc 16.
- $346 = 17 \times 20 + 6$ donc $346 \equiv 6\ [17]$ d'où $346^{12} \equiv 6^{12}\ [17]$
  De plus $6^{12} = (6^2)^6$ donc $6^{12} \equiv (2)^6\ [17] \equiv -1 \times 2^2\ [17] \equiv -4\ [17] \equiv 13\ [17]$
  Le reste de la division euclidienne par 17 de 346^{12} est donc 13.

Partie D

On pose $A_n = n^5 - n\ ,\ n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer, sans utiliser de congruences, que A_n est pair.

$$A_n = n^5 - n = n(n^4 - 1)$$

n est n^4 ont la même parité donc n est $n^4 - 1$ n'ont pas la même parité ; A_n est donc pair.

2. En utilisant les congruences modulo 5, démontrer que A_n est divisible par 5.

Dressons un tableau de congruences modulo 5

$n \equiv$	0	1	2	3	4
n^4	0	1	1	1	1
$n^4 - 1$	4	0	0	0	0
$n(n^4 - 1)$	0	0	0	0	0

$A_n \equiv 0\ [5]$ donc A_n est divisible par 5.

3. Pourquoi A_n est-il divisible par 10 ?

A_n est multiple de 2 et de 5, il est donc multiple de 10.

Question Bonus (obligatoire et spécialité)

Montrer que le nombre 1,232323232323… peut s'écrire comme quotient de deux entiers naturels que l'on précisera.

Posons $u_1 = 0{,}23 = \frac{23}{10^2}$, $u_2 = 0{,}0023 = \frac{23}{10^4} = u_1 \times \frac{1}{10^2}$, $u_3 = 0{,}000023 = \frac{23}{10^6} = u_2 \times \frac{1}{10^2}$

Par définition, la suite u ainsi définie est une suite géométrique de 1[er] terme $u_1 = \frac{23}{100}$ et de raison $\frac{1}{10^2}$.

On peut en déduire que :

$$0,\underbrace{23232323\ldots23}_{n\ répétition\ de\ 23} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10^2}\right)^n}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{23}{99} \times \left(1 - \left(\frac{1}{10^2}\right)^n\right)$$

Puis que :

$$\underbrace{1{,}23232323\ldots}_{répétition\ infinie\ de\ 23} = 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{23}{99} \times \left(1 - \left(\frac{1}{10^2}\right)^n\right) = 1 + \frac{23}{99} = \frac{122}{99} \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{10^2}\right)^n = 0 \text{ étant donné}$$

que $-1 \leq \frac{1}{10^2} \leq 1$.

Finalement : $1{,}2323232323\ldots = \frac{122}{99}$