Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°2 Durée 1h55 mn	10 octobre 2018

Exercice 1 (4 points)

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 80].
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à :
$$0{,}12 + 0{,}004x$$
2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Exercice 2 (2 points)

Deux évènements disjoints de probabilités non nulles peuvent-ils être indépendants ?

Exercice 3 (4 points)

On considère deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.
L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.
On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n ($n > 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A_n l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité.
On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}05$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
3. Calculer p_3.
4. ***a.*** Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0{,}25$.
b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
c. En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté l.
d. Justifier que l vérifie l'équation : $l = 0{,}8l + 0{,}05$. En déduire la valeur de l.

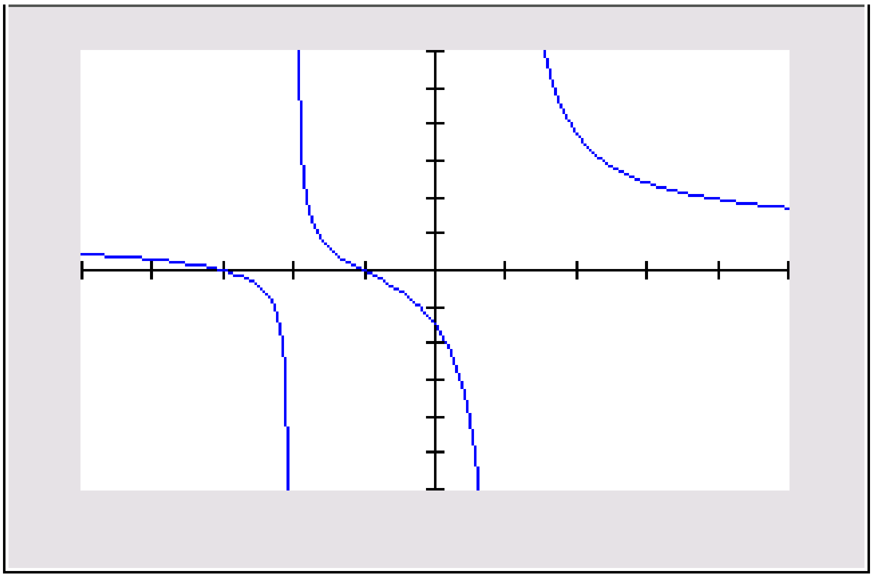
Exercice 4 (7 points)

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2)$	b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right)$	c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)$
d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\right)$	e) $\lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\right)$	f) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)$

Exercices 5 (3 points)

On a tracé sur l'écran de la calculatrice, la représentation graphique d'une fonction f.
On sait que f est définie sur $\mathbb{R}$ privé de deux réels a et b.
À l'aide du graphique suivant, conjecturer les valeurs de a et b ainsi que des limites de f aux bornes de son ensemble de définition.



Question bonus

Montrer en utilisant la définition de la limite finie à l'infini que :

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$