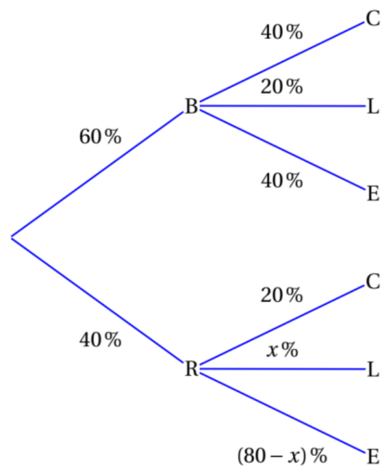
Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°2 Durée 1h55 mn	10 octobre 2018

Exercice 1 (4 points) 2002

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 80].
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
On tire au hasard un cube de l'urne.

Si on note les évènements :

B : le cube est bleu
R : le cube est rouge
C : le cube a ses faces marquées d'un cercle
L : le cube a ses faces marqués d'un losange
E : le cube a ses faces marquées d'une étoile .
On a l'arbre suivant :



1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à : $0{,}12 + 0{,}004x$

La probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à :

$$60\ \% \times 20\ \% + 40\ \% \times x\ \% = 0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times \frac{x}{100} = 0{,}12 + 0{,}004x$$

2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

Notons $P(L)$ la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange et $P(E)$ celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

$$P(L) = P(E) \iff 0{,}12 + 0{,}004x = 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times \frac{80-x}{100}$$
$$\iff 0{,}12 + 0{,}004x = 0{,}24 + 0{,}32 - 0{,}004x$$
$$\iff 0{,}008x = 0{,}44$$
$$\iff x = 55$$

La probabilité de tirer un cube marqué d'un losange est égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile pour $x = 55$.

3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.

Les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » sont indépendants équivaut à

$$P_B(L) = P(L) \iff 0{,}2 = 0{,}12 + 0{,}004x \iff x = \frac{0{,}2 - 0{,}12}{0{,}004} = 20$$

soit pour $x = 20$.

4. On suppose dans cette question que $x = 50$.
Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

$$P_L(B) = \frac{P(L \cap B)}{P(L)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}2}{0{,}12 + 0{,}004 \times 50} = \frac{0{,}12}{0{,}32} = 0{,}375$$

La probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange est donc $0{,}375$.

Exercice 2 (2 points)

Deux évènements disjoints de probabilités non nulles peuvent-ils être indépendants ?

Soient A et B deux évènements disjoints de probabilités non nulles alors on a :

$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$ et $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

On sait que A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ et par conséquent $P(A) \times P(B) = 0$ ce qui est impossible puisque $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

Conclusion : deux évènements disjoints de probabilités non nulles ne peuvent pas être indépendants

Exercice 3 (4 points) Liban Mai 2007

On considère deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.

On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n ($n > 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A_n l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité.

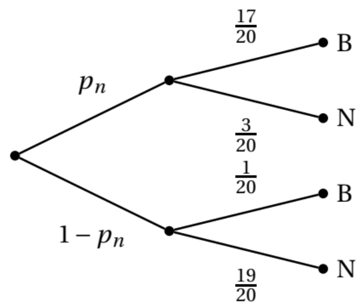
On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.

On a dans l'urne U_1, 17 boules blanches, donc $p_2 = \frac{17}{20} = 0{,}85$.

2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}05$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

On peut s'aider d'un arbre. Pour obtenir p_{n+1} il faut considérer les cas où l'on a tiré au rang précédent une boule blanche :



On a donc $p_{n+1} = \frac{17}{20}p_n + (1-p_n) \times \frac{1}{20} = \frac{16}{20}p_n + \frac{1}{20}$.

Conclusion $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}05$

3. Calculer p_3.

D'après la formule trouvée

$$p_3 = 0{,}8p_2 + 0{,}05 = 0{,}8 \times 0{,}85 + 0{,}005 = 0{,}68 + 0{,}05 = 0{,}73$$

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0{,}25$.

Initialisation : $p_1 = 1 > 0{,}25$.

Hérédité : supposons qu'au rang n_0, $p_{n_0} > 0{,}25$, alors $0{,}8p_{n_0} > 0{,}2$ et ensuite $0{,}8p_{n_0} + 0{,}05 > 0{,}2 + 0{,}05$ ou encore $p_{n_0+1} > 0{,}25$.

On a donc montré par récurrence sur n que pour tout naturel n non nul : $p_n > 0{,}25$.

b. Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

$$p_{n+1} - p_n = 0{,}8p_n + 0{,}05 - p_n = -0{,}2p_n + 0{,}05.$$

Or on vient de démontrer que $p_n > 0{,}25$ qui entraîne

$-0{,}2p_n < -0{,}2 \times 0{,}25$ soit $-0{,}2p_n < -0{,}05 \;\Leftrightarrow\; -0{,}2p_n + 0{,}05 < 0$

On a donc pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$, c'est-à -dire que la suite (p_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté l.

La suite (p_n) est décroissante et minorée par $0{,}25$: elle donc convergente vers un réel ℓ supérieur ou égal à $0{,}25$.

d. Justifier que l vérifie l'équation : $l = 0{,}8l + 0{,}05$. En déduire la valeur de l.

Les suites (p_n) et (p_{n+1}) ayant la même limite ℓ, la relation de récurrence

$p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}05$ donne $\ell = 0{,}8\ell + 0{,}05 \;\Leftrightarrow\; 0{,}2\ell = 0{,}05 \;\Leftrightarrow\; \ell = \frac{0{,}05}{0{,}2} = 0{,}25.$

Conclusion: $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0{,}25 = \frac{1}{4}$.

Exercice 4 (7 points)

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})\times(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$, par somme et par inversion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right)$

$\lim\limits_{x\to1^+} (x-1) = 0^+$ donc, par inverse, $\lim\limits_{x\to1^+} \left(\frac{1}{x-1}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1) = 1$

e) $\lim\limits_{x\to-1} \left(\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}\right) = \lim\limits_{x\to-1} \left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}\right) = \lim\limits_{x\to-1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

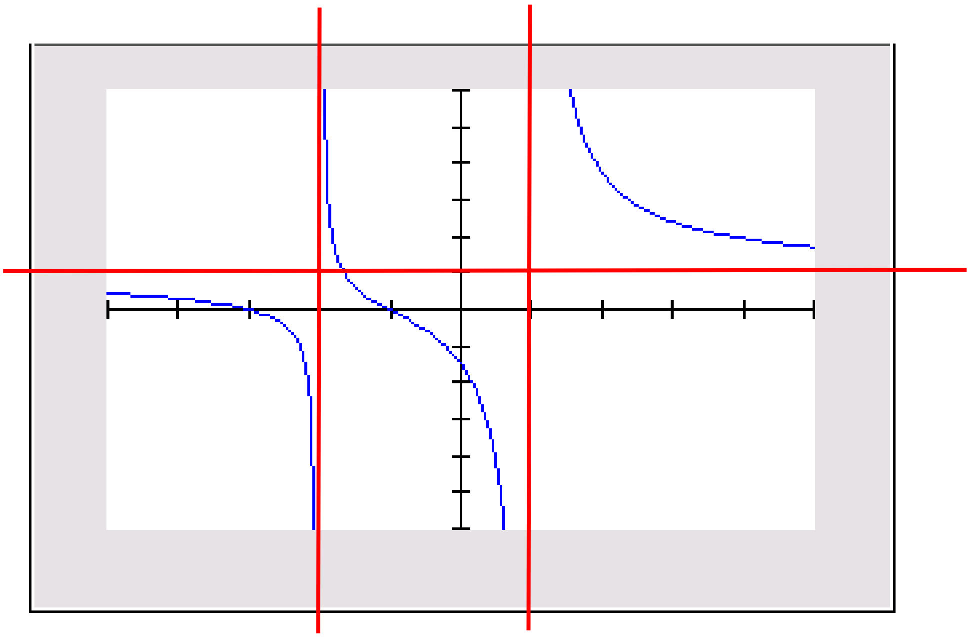
- $\lim\limits_{x\to-1} (x-1) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} (x-1) = 0^+$ donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-1} (x-1) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} (x-1) = 0^-$ donc par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-1 \\ x<-1}} \left(\frac{x-1}{x+1}\right) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x\to2} \left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to2} (x-2)^2 = 0^+$ donc par inverse, $\lim\limits_{x\to2} \left(\frac{1}{(x-2)^2}\right) = +\infty$

Exercices 5 (*3 points*)

On a tracé sur l'écran de la calculatrice, la représentation graphique d'une fonction f.
On sait que f est définie sur $\mathbb{R}$ privé de deux réels a et b.
À l'aide du graphique suivant, conjecturer les valeurs de a et b ainsi que des limites de f aux bornes de son ensemble de définition.



À la vue de ce graphique on peut raisonnablement penser que la fonction n'est pas définie en $x = -2$ et $x = 1$. Ainsi $a = -2$ et $b = 1$ (ou inversement).
Le comportement de f aux bornes de D_f laisse penser que :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

Question bonus

Montrer en utilisant la définition de la limite finie à l'infini que : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est paire donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. On peut donc montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$.

Soit ***A* un réel strictement positif** choisi aussi grand que l'on souhaite. On a :

$$x > A \Leftrightarrow x^2 > A^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < \frac{1}{A^2}$$

Ceci signifie que dès que x est suffisamment grand, $\frac{1}{x^2}$ peut être rendu aussi petit que l'on veut donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$ et par conséquent, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$.