# Nombres complexes
# Fiche exercices n°2 (Sésamath page 253…)

## Module et argument

**60**

Dans le plan complexe représenter, dans chacun des cas suivants, les points $M$ dont les affixes $z$ remplissent la condition donnée :

**1)** $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$

**2)** $|z| = 5$

**3)** $|z| = 3$ et $\arg(z) = \pm\pi$

**4)** $\arg(z) = -\pi$

**61**

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

**1)** $z_1 = 7$

**2)** $z_2 = 2\mathrm{i}$

**3)** $z_3 = \dfrac{-1+\mathrm{i}}{3}$

**4)** $z_4 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$

**63** Dans chacun des cas suivants, déterminer de deux manières différentes le module et l'argument du nombre complexe proposé

**1)** $z_1 = \left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\right)(-1-\mathrm{i})$

**2)** $z_2 = \dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+\mathrm{i}\sqrt{2}}$

**3)** $z_3 = \mathrm{i}\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)$

**4)** $z_4 = \left(\dfrac{3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^2$

**64**

Dans le plan complexe, représenter les points $M$ d'affixe $z$ satisfaisant les conditions suivantes :

**1)** $\arg(z-1) = \dfrac{\pi}{2}$

**2)** $|z-3| = 2$

**3)** $|z-\mathrm{i}| = 5$

**4)** $2\arg(z) = 0$

**67** Dans le plan complexe, représenter dans chacun des cas suivants les points $M$ dont l'affixe $z$ vérifie :

**1)** $\arg(\mathrm{i}z) = \dfrac{\pi}{3}$

**2)** $|2z-\mathrm{i}| = 1$

**3)** $|z-3| = |z+4|$

**4)** $\arg\left(\dfrac{\mathrm{i}}{\pi z}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

**5)** $\dfrac{|3z-2|}{|z+3\mathrm{i}|} = 1$

**6)** $\arg(3\mathrm{i}z) = \dfrac{\pi}{3}$

**7)** $\left|\dfrac{z+1}{z+2}\right| = 1$

**8)** $\arg(\mathrm{i}z^2) = \dfrac{4\pi}{3}$

**68**

**1)** Traduire géométriquement la condition $z\bar{z} = 4$.

**2)** Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe $z$ est telle que $z\bar{z} = 4$.

**69**

**1)** Traduire géométriquement la condition

$$(z-i)\overline{(z-i)} = 9$$

**2)** Développer et simplifier autant que possible l'expression $(z-i)\overline{(z-i)}$.

**3)** Représenter dans le plan complexe l'ensemble des points dont l'affixe $z$ vérifie $|z|^2 - 2\,\mathrm{Im}\, z = 8$.

**71** ROC

On rappelle les prérequis suivants :

Pour tous nombres complexes $z$ et $z'$ on a

$$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi].$$

**1)** Démontrer que pout tout entier naturel $n$ :

$$\arg(z^n) = n\arg(z) \ [2\pi].$$

**2)** Déterminer un argument du complexe $z = 3 - 3\mathrm{i}$ et en déduire que $z^n$ est un nombre réel si et seulement si $n$ est un multiple de 4.

**72**

Soient $A, B, C, D$ quatre points du plan distincts deux à deux. On note $z_A, z_B, z_C, z_D$ leurs affixes respectives.

**1)** Démontrer qu'une mesure en radians de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)$ est donnée par $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$.

**2)** Dans chacun des cas suivants, utiliser le résultat précédent pour vérifier si le triangle $ABC$ est rectangle en $B$.

**a)** $A(3+2\mathrm{i})$, $B(0)$ et $C\left(-1+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)$ ;

**b)** $A(2-\mathrm{i})$, $B(1-4\mathrm{i})$ et $C(-2-3\mathrm{i})$ ;

**c)** $A(-4)$, $B(-2+3\mathrm{i})$ et $C(4-\mathrm{i})$.

**3)** Dans les cas où il est rectangle vérifier s'il est isocèle.

## Forme trigonométrique

**73** Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

**1)** $7$

**2)** $5\mathrm{i}$

**3)** $-2-2\mathrm{i}$

**4)** $\mathrm{i} + \sqrt{3}$

**5)** $-5$

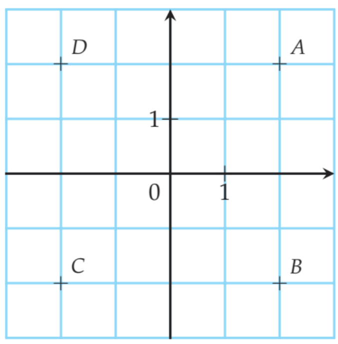
**6)** $-2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$

**7)** $\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$

**8)** $\dfrac{1}{3} - \dfrac{i}{3}$

**76** Question ouverte

On considère les points suivants dans le plan complexe




Déterminer une écriture sous forme trigonométrique des affixes des points $A$, $B$, $C$ et $D$.

**77** Donner une valeur approchée au centième d'un argument de chacun des nombres complexes suivants :

1) $4-3\mathrm{i}$
2) $1+2\mathrm{i}$
3) $-2+\mathrm{i}$
4) $-3-\mathrm{i}$

**78** On considère le nombre complexe $z=\dfrac{2}{1-i}$.

1) Déterminer sa forme trigonométrique de deux façons différentes.
2) En déduire que $z^8$ est un nombre réel.
3) Généraliser le calcul précédent.

**79** On considère un nombre complexe $z$ tel que

$$\begin{cases} |z| & =2 \\ \arg(z) & =\dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

1) Déterminer les écritures trigonométriques et algébriques de $z$.
2) Déterminer l'écriture algébrique de $\dfrac{1}{z}$.
3) Déterminer, par deux méthodes différentes, l'écriture algébrique de $\dfrac{1}{\bar{z}}$.

**80**

On considère les nombres complexes

$$z=\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z'=1-\mathrm{i}$$

1) Déterminer le module et un argument de $z$, $z'$ et $\dfrac{z}{z'}$.
2) Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$.
3) En déduire que

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

et

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$