1. Exercice – Nlle Calédonie Mars 2014

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Soit z un nombre complexe de la forme $x + iy$, où x et y sont des réels.

1. Soit z le nombre complexe d'affixe $(1+i)^4$. L'écriture trigonométrique de z est :

a. $\sqrt{2}(cos\pi + isin\pi)$	b. $4(cos\pi + isin\pi)$	c. $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$	d. $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2. L'ensemble des points M du plan d'affixe $z = x+iy$ tels que $\left|z-1+i\right| = \left|\sqrt{3}-i\right|$ a pour équation :

a. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$	b. $(x+1)^2+(y-1)^2=2$	c. $(x-1)^2+(y+1)^2=4$	d. $y=x+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

3. On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_0 = 1+i$ et $Z_{n+1}=\dfrac{1+i}{2}Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n.

a. Pour tout entier naturel n, le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
b. Pour tout entier naturel n, le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.
c. La suite (U_n) définie par $U_n = \left|Z_n\right|$ est convergente.
d. Pour tout entier naturel n, un argument de $\dfrac{Z_{n+1}-Z_n}{Z_n}$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

4. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives : $Z=-1-i$, $Z_B=2-2i$ et $Z_C=1+5i$.

On pose $Z=\dfrac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$.

a. Z est un nombre réel.	b. Le triangle ABC est isocèle en A.	c. Le triangle ABC est rectangle en A.	d. Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment $[BC]$.

2. Exercice (4 points) Centres étrangers Juin 2014

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z_n par : $\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2}z_n \end{cases}$, pour tout entier naturel n.

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = \left|z_n\right|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. a. Calculer z_1, z_2 et z_3.

b. Placer les points A_1 et A_2 dans le plan.

c. Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.

d. Démontrer que le triangle OA_1A_2 est isocèle rectangle en A_1.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La suite (r_n) est-elle convergente ?

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.

Ainsi $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + ... + A_{n-1}A_n$.

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

b. Donner une expression de L_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

d. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $A(6)$.

3. Exercice – Liban Mai 2014

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel *n* :

$$z_{n+1} = (1+i)z_n.$$

Partie A

Pour tout entier naturel *n*, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.

2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.

3. Pour tout entier naturel *n*, exprimer u_n en fonction de *n*.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

5. Étant donné un réel positif *p*, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel *n* telle que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier *n*.

Variables	u est un réel, p est un réel, n est un entier
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 Demander la valeur de p
Traitement	???
Sortie	???

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de 1+*i*. En déduire la forme exponentielle de z_1.

3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.