Baccalauréat S - Pondichéry 4 mai 2018

Exercice 2 - 4 points (Commun à tous les candidats)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{u}, \vec{v})$.
Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a = -4, b = 2$ et $c = 4$.

1. On considère les trois points A$'$, B$'$ et C$'$ d'affixes respectives $a' = \mathrm{j}a$, $b' = \mathrm{j}b$ et $c' = \mathrm{j}c$ où

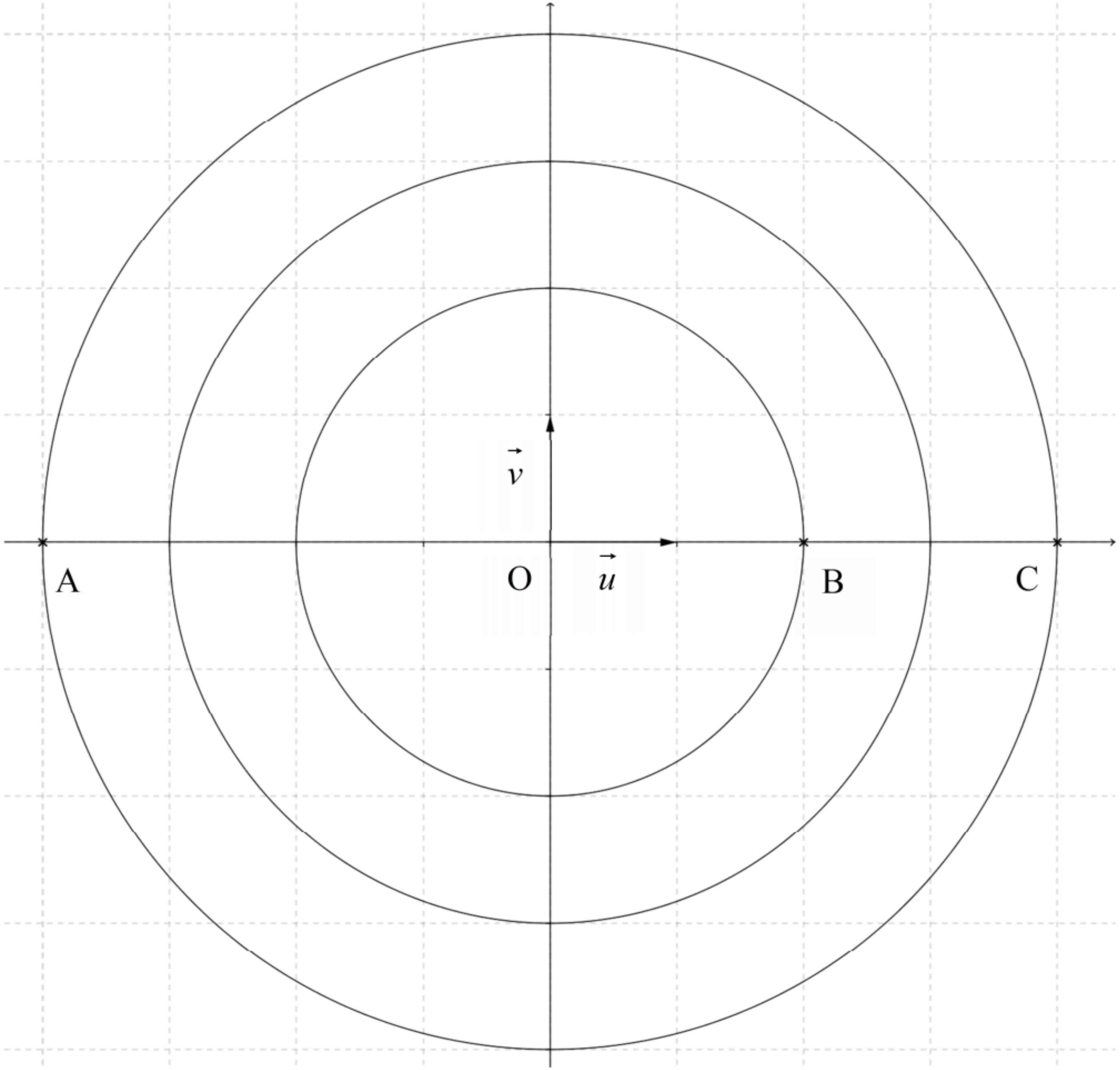
   j est le nombre complexe $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   (a) Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique de j.
   En déduire les formes algébriques et trigonométriques de a', b' et c'.

   (a) Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique fourni en **Annexe**.
   Placer les points A$'$, B$'$ et C$'$ sur ce graphique en justifiant la construction.

2. Montrer que les points A$'$, B$'$ et C$'$ sont alignés.

3. On note M le milieu du segment [A$'$C], N le milieu du segment [C$'$C] et P le milieu du segment [C$'$A].
   Démontrer que le triangle MNP est isocèle.



$\vec{v}$
A
O
$\vec{u}$
B
C

Corrigé

1. On considère les trois points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = \mathrm{j}a$, $b' = \mathrm{j}b$ et $c' = \mathrm{j}c$ où j est le nombre complexe $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   a) Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique de j.

Forme trigonométrique

$$\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{or } -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ donc } \mathrm{j} = 1 \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

En déduire les formes algébriques et trigonométriques de a', b' et c'.

$a' = a\mathrm{j} = -4\mathrm{j} = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$: c'est la forme algébrique de a'

Attention: $-4 \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ n'est pas une forme trigonométrique

Déterminons le module et un argument de a'

$$|a'| = |-4j| = |-4|\,|j| = 4 \times 1 = 4$$

$$\arg(a') = \arg(-4 \times j) = \arg(-4) + \arg(j) = -\pi + \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

À « 2π » près

On peut alors en déduire une forme trigonométrique de a' :

$$a' = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Forme algébrique

$$b' = bj = 2j = -1 + i\sqrt{3}$$

Forme trigonométrique

$$b' = 2j = 2 \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$c' = cj = 4j = -2 + 2i\sqrt{3}$$

Forme algébrique

$$c' = 4j = 4 \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

Forme trigonométrique

b) Les points A, B et C ainsi que les cercles de centre O et de rayon 2, 3 et 4 sont représentés sur le graphique fourni en **Annexe**.

Placer les points A′, B′ et C′ sur ce graphique en justifiant la construction.

$$a' = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2 - 2i\sqrt{3}$$

$|a'| = 4$ donc A′ est sur le cercle de centre O et de rayon 4

et on a $Re(a') = 2$ et $Im(a') < 0$, on peut donc placer A′

$$b' = -1 + i\sqrt{3} = 2 \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

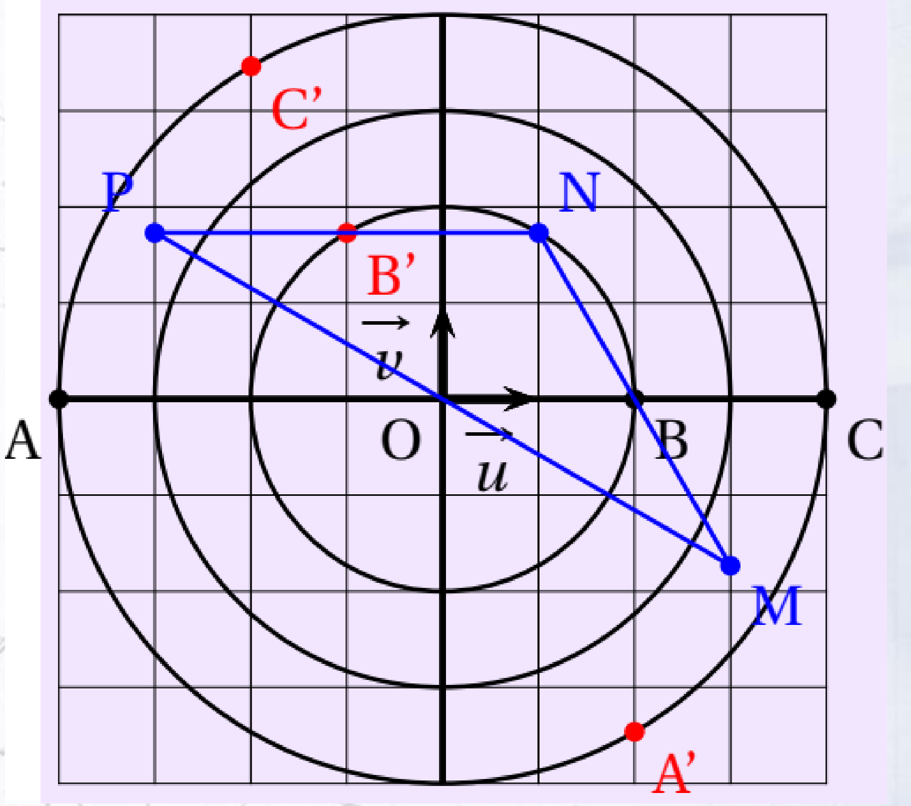
$|b'| = 2$ donc B′ est sur le cercle de centre O et de rayon 2

et on a $Re(b') = -1$ et $Im(b') > 0$, on peut donc placer B′

$$c' = -2 + 2i\sqrt{3} = 4 \times \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$|c'| = 4$ donc C′ est sur le cercle de centre O et de rayon 4

et on a $Re(c') = -2$ et $Im(c') > 0$, on peut donc placer C′



2. Montrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.

La figure laisse suggérer que les points O, A’, B’ et C’ sont alignés.
Orientons donc notre démonstration dans ce sens en montrant d’une part que O, A′ et C′ sont alignés et d’autre part, que O, B′ et C′ sont alignés.

Rappelons que : $a' = 2 - 2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$$b' = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$c' = -2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$a' = -c'$ donc A′ et C′ sont symétriques par rapport à O alors O, A′ et C′ sont alignés

$arg(b') = arg(c') = \frac{2\pi}{3}(2\pi)$ donc $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC'}$ sont colinéaires d’où O, B′ et C′ sont alignés

Finalement O, A′, B′ et C′ sont alignés

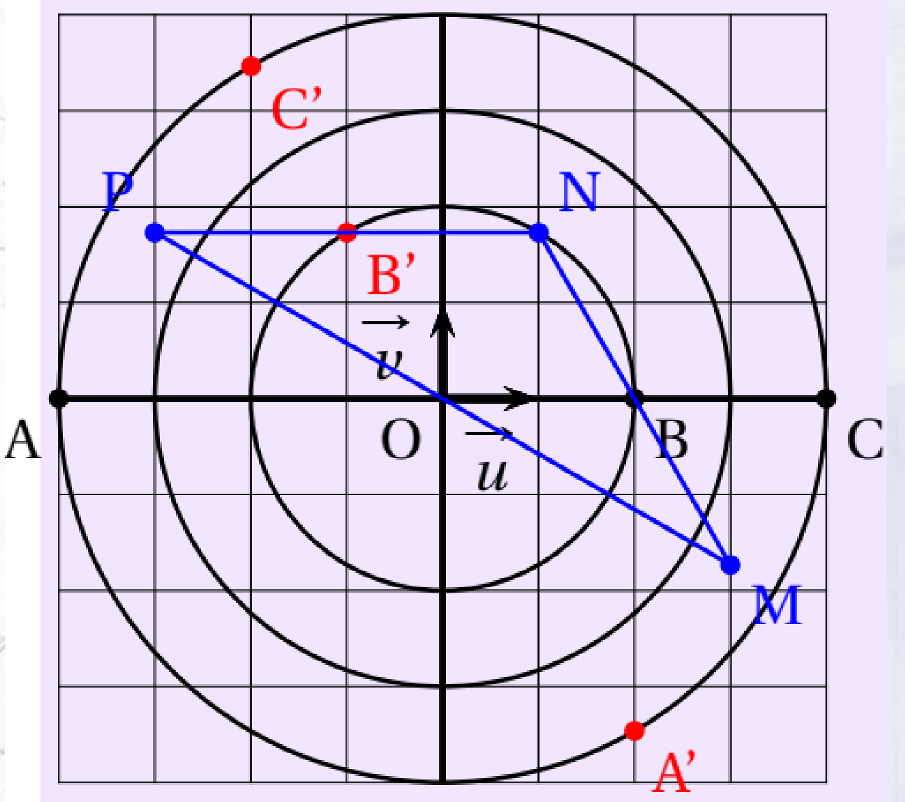
Remarque: On aurait pu démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ (par exemple) sont colinéaires en utilisant les affixes des points A', B' et C'.

3. On note M le milieu du segment [A′C], N le milieu du segment [C′C] et P le milieu du segment [C′A].
Démontrer que le triangle MNP est isocèle.

$$z_\mathrm{M} = \frac{a' + c}{2} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_\mathrm{N} = \frac{\mathrm{c}' + \mathrm{c}}{2} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3} \qquad z_\mathrm{P} = \frac{c' + a}{2} = -3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$$

MNP semble isocèle en N d'après le dessin

$$PN = |z_N - z_P| = \left|\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) - \left(-3 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\right| = |4| = 4$$



$$MN = |z_N - z_M| = \left|\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) - \left(3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)\right|$$
$$= \left|2 - 2i\sqrt{3}\right|$$
$$= \sqrt{(2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

On a $MN = NP$ donc MNP est bien isocèle en N