Durée : 4 heures

OBLIGATOIRE
et
SPÉCIALITÉ

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice ne concerne pas les élèves suivants la spécialité

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0{,}3 \\ u_{n+1} & = & 0{,}9u_n(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle [0 ; 1].
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}9u_n$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 0{,}3 \times 0,9^n$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
   On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.
   Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

   $u \leftarrow 0{,}3$
   $n \leftarrow 0$
   $Tant\ que \ldots\ldots faire$:
   $\vdots$
   $Fin\ de\ Tant\ que$
   $Afficher \ldots\ldots$

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 & = & 0{,}032 \\ v_{n+1} & = & 1{,}06v_n(1-v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geq 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite.
   Montrer que ℓ vérifie :
   $$\ell = 1{,}06\ell(1-\ell).$$
3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

Exercice 2 (6 points)

Partie A

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Calculer $u'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction u.
2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.
3. En déduire le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x.
4. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3}.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

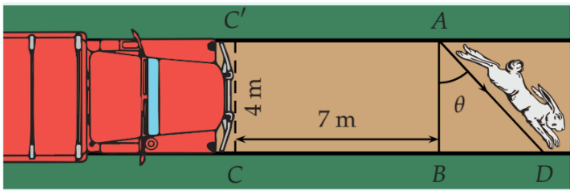
$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}.$$

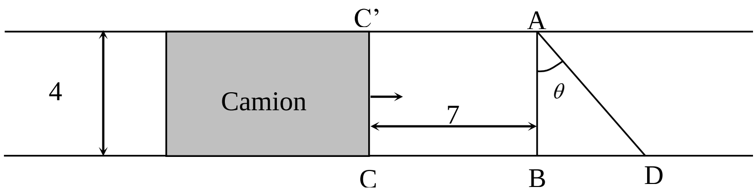
1. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et que $f'(x) = \frac{u(x)}{(1+x^3)^2}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $]-1;+\infty[$.
4. En remarquant que $2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 1 = 0$, montrer que $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$.
5. a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f représentative de f au pointd'abscisse $x = 0$.
   b) Étudier la position relative de T par rapport à C_f.

Exercice 3 (5 points)

Un camion, occupant les 4 mètres de large d'un chemin rectiligne, arrive à la vitesse de 60 km·h $^{-1}$ à proximité d'un lapin. Au moment où le camion n'est plus qu'à 7 mètres du lapin, celui-ci sursaute et traverse le chemin en ligne droite à 30 km·h $^{-1}$.

Sur le schéma ci-dessous : le segment $[CC']$ représente l'avant du camion ; le lapin va du point A au point D avec un angle $\theta = \widehat{BAD}$ où $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).





1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.
2. Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si :
$$\frac{7}{2} + \frac{2\sin\theta - 4}{\cos\theta} > 0$$
3. On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + \frac{2\sin\theta - 4}{\cos\theta}$ pour $\theta \in [0\,;\frac{\pi}{2}[$
   a) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\frac{\pi}{2}[$ et que, pour tout $x \in [0\,;\frac{\pi}{2}[$,
$$f'(\theta) = \frac{2 - 4\sin\theta}{\cos^2\theta}$$
   b) Déterminer le signe de f' sur l'intervalle $[0\,;\frac{\pi}{2}[$.
   c) Déterminer $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} f(\theta)$ puis dresser le tableau de variation de f.
   d) Montrer que l'équation $f(\theta) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$.
4. Sous quelles conditions le lapin pourra-t-il survivre à cette traumatisante expèrience !

Exercice 4 (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A - QCM
Pour chaque proposition, 4 réponses sont proposées : une seule est exacte.
Donner une seule réponse sans justification (0,5 point par bonne réponse et 0 sinon).

1. Le nombre complexe $(1+i)^{72}$ est égal à :

a. 2^{72}	***b.*** $6{,}9\times 10^{10}$	***c.*** 2^{36}	***d.*** 0

2. Le nombre complexe $\frac{1+i}{1-2i}$ est égal à :

a. $-\frac{1}{2}$	***b.*** $1-3i$	***c.*** $3-i$	***d.*** $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

3. La solution de l'équation $2iz+1=2-i$ est :

a. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	***b.*** $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	***c.*** $-\frac{1}{3}i$	***d.*** $-1+i$

4. La solution de l'équation $z+2i\bar{z}=2-5i$ est :

a. 1	***b.*** $\frac{8}{3}-\frac{1}{3}i$	***c.*** $2-\frac{5}{2}i$	***d.*** $-4+3i$

Partie B
Pour chaque affirmation répondre par Vrai ou Faux en justifiant. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Il sera attribué 1 point par bonne réponse correctement justifiée.

1. Une urne contient trois boules indiscernables au toucher portant respectivement les numéros 1, 2 et 3.
On tire successivement trois fois une boule avec remise.
On note N la variable aléatoire donnant le nombre de numéros différents obtenus.
Affirmation: L'espérance de N est strictement supérieure à $\frac{3}{2}$.

2. Une entreprise produit en grande série des véhicules électriques.
On admet que la probabilité qu'un véhicule ne soit pas conforme vaut $0{,}03$.
On prélève au hasard un lot de 100 véhicules en vue de les proposer à la location dans une grande agglomération (on admet que la population est suffisamment importante pour assimiler la constitution de ce lot à 100 tirages successifs avec remise).
Affirmation: la probabilité qu'aucun véhicule de ce lot ne soit défectueux est égal à $1-0{,}03^{100}$.

3. On considère l'algorithme suivant.

Entrée :	Saisir un entier naturel n supérieur ou égal à 1
Traitement :	Affecter à A la valeur 0. Pour k allant de 1 à n Affecter à A la valeur $A+\frac{1}{k}$ Fin pour Affecter à A la valeur nA
Sortie :	Afficher A

Affirmation : pour $n=6$, le résultat affiché est 14,7.

*Exercice 5 - **Spécialité uniquement** (5 points)*

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ avec a réel strictement positif et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le but est de déterminer M^{1000}de **trois façons**.

1. Méthode n°1
   a) Calculer M^2, M^3 et M^4.
   b) Conjecturer puis démontrer l'expression de M^n en fonction de n.
   En déduire M^{1000}.

2. Méthode n°2
   a) Vérifier que $M^2 = 2M - I$.
   b) En déduire M^3 et M^4 en fonction de M et I .
   c) Conclure.

3. Méthode n°3
   a) Déterminer la matrice A telle que $M = I + A$.
   b) Calculer A^2.
   c) En déduire M^2, M^3 et M^4 en fonction de A et I .
   d) Exprimer M^{1000} en fonction de A et I .
   e) Conclure.

Partie B

On donne la matrice carrée d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. A l'aide de la calculatrice, donner A^2 , A^3 et A^4.
2. En déduire A^n (on ne demande pas de démontrer ce résultat).