Exercice 1 (5 points) Polynésie Sept 2017

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.
On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0{,}3 \\ u_{n+1} & = & 0{,}9u_n(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000+n$.

1. Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
$u_1 = 0{,}9u_0(1-u_0) = 0{,}9 \times 0{,}3 \times (1-0{,}3) = 0{,}189$; le nombre de tortues en 2001 est 189.
$u_2 = 0{,}9u_1(1-u_1) = 0{,}9 \times 0{,}189 \times (1-0{,}189) \approx 0{,}138$; le nombre de tortues en 2001 est 138.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle [0 ; 1].
(a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}9u_n$.

On sait que $0 \leq 1-u_n \leq 1$; on multiplie les trois membres de cette inégalité par le nombre u_n de l'intervalle $[0; 1]$, donc qui est positif ou nul: $0 \leq u_n(1-u_n) \leq u_n$.
D'où on déduit en multipliant par 0,9 l'inégalité $0 \leq 0{,}9u_n(1-u_n) \leq 0{,}9u_n$ c'est-à -dire $0 \leq u_{n+1} \leq 0{,}9u_n$, pour tout n.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 0{,}3 \times 0,9^n$.

* **Initialisation**

Pour $n = 0$: $u_0 = 0{,}3$ et $0{,}3 \times 0,9^0 = 0{,}3$ donc $u_0 \leq 0{,}3 \times 0,9^0$.
La propriété est vraie au rang 0.

* **Hérédité**

On suppose que, pour $n \geq 0$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est-à -dire $u_n \leq 0{,}3 \times 0,9^n$. On va démontrer qu'elle est vraie au rang $n+1$.
D'après la question précédente: $u_{n+1} \leq 0{,}9u_n$.
D'après l'hypothèse de récurrence: $u_n \leq 0{,}3 \times 0,9^n$.
On déduit: $u_{n+1} \leq 0{,}9 \times 0{,}3 \times 0,9^n$ c'est-à -dire: $u_{n+1} \leq 0{,}3 \times 0,9^{n+1}$.
Donc la propriété est vraie au rang $n+1$ donc elle est héréditaire.

* **Conclusion**

La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 0$, et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$; d'après le principe de récurrence, on peut donc dire que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.
On a donc démontré par récurrence que, pour tout n, $u_n \leq 0{,}3 \times 0,9^n$, et on a donc par conséquence:
$0 \leq u_n \leq 0{,}3 \times 0,9^n$.

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n). Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

$-1 < 0{,}9 < 1$ donc la suite géométrique $(0,9^n)$ a pour limite 0;
on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} 0{,}3 \times 0{,}9^n = 0$.
On sait que, pour tout n, $0 \leq u_n \leq 0{,}3 \times 0,9^n$ donc, d'après le théorème des gendarmes, on peut déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Cela signifie que cette population de tortues est en voie d'extinction.

3. Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.
On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année **avant** laquelle il reste au moins 30 tortues.
Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

$u \leftarrow 0{,}3$
$n \leftarrow 0$
$Tant\ que$ $\boldsymbol{u > 0,03}$ $faire$:
  $\boldsymbol{n \leftarrow n+1}$
  $\boldsymbol{u \leftarrow 0,9u(1-u)}$

$Fin\ de\ Tant\ que$
$Afficher$ $\boldsymbol{n-1}$

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_0 & = & 0{,}032 \\ v_{n+1} & = & 1{,}06 v_n(1-v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geq 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année $2000 + n$.

1. Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.

$v_{11} = 1{,}06 v_{10}(1 - v_{10}) = 1{,}06 \times 0{,}032(1 - 0{,}032) \approx 0{,}033$; il y aura donc 33 tortues en 2011.
$v_{12} = 1{,}06 v_{11}(1 - v_{11}) = 1{,}06 \times 0{,}033(1 - 0{,}033) \approx 0{,}034$; il y aura donc 34 tortues en 2012.

2. On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle ℓ sa limite. Montrer que ℓ vérifie :

$$\ell = 1{,}06\ell(1-\ell).$$

$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$ donc $\lim_{n\to+\infty} (1 - v_n) = 1 - \ell$; on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} 1{,}06 v_n\,(1 - v_n) = 1{,}06\ell(1-\ell)$.
De plus $\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.
Comme $v_{n+1} = 1{,}06 v_n(1 - v_n)$, d'après l'unicité de la limite, on peut dire que $\ell = 1{,}06\ell(1-\ell)$.

3. La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

La suite (v_n) est croissante et $v_{11} = 0{,}032$ ce qui signifie qu'il y a a 32 tortues en 2010.
Donc, pour tout $n \geq 10$, $v_n \geq v_0$ autrement dit $v_n \geq 0{,}032$.
Il y aura donc au moins 32 tortues pour toute année au delà de 2010, donc cette population de tortues n'est plus en voie d'extinction.

Exercice 2 (5 points) **Exercice n°69 Sésamath**

Partie A

Soit la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Calculer $u'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction u.

La fonction u est un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$.
On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$6x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et on en déduit le tableau des variations de u.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$u(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

2. Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 2$.

On peut commencer par exclure l'intervalle $]-\infty\,;1]$ puisque sur cet intervalle, la fonction u admet un maximum strictement négatif : elle est donc strictement négative et, par conséquent, ne s'annule pas.
Sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, la fonction u est strictement croissante et change de signe, elle admet donc, d'après le corollaire du théorèmes des valeurs intermédiaires, une solution unique α à l'équation $u(x) = 0$.
$u(1) = -2$ et $u(2) = 3 > 0$ donc $1 < \alpha < 2$.

3. En déduire le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x.

D'après les questions ***1.*** et ***2.*** on peut en déduire que :

- $u(x) < 0$ si $x \in]-\infty\,;\alpha[$
- $u(\alpha) = 0$
- $u(x) > 0$ si $x \in]\alpha\,;\,+\infty[$.

4. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3}.

A l'aide de la calculatrice, $\alpha \approx 1{,}678$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}.$$

1. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-1^-}(1-x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to-1^-}(1+x^3) = 0^+$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2} = 0.$

2. Montrer que f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et que $f'(x) = \frac{u(x)}{(1+x^3)^2}$.

f est un quotient de deux polynômes, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition et :

$$f'(x) = \frac{(-1)(1+x^3)-(1-x)(3x^2)}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(1+x^3)^2} = \frac{u(x)}{(1+x^3)^2}$$

3. Dresser le tableau de variation de f sur $]-1;+\infty[$.

$(1+x^3)^2 > 0$ sur $]-1;+\infty[$ donc le signe de f' est le même que celui de u obtenu à la question ***A.3.***

x	-1		α		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

4. En remarquant que $2\alpha^3-3\alpha^2-1=0$, montrer que $f(\alpha) = \frac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$

$$u(\alpha)=0 \iff 2\alpha^3-3\alpha^2-1=0 \iff 2\alpha^3=3\alpha^2+1$$

On a alors :

$$f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha^3} = \frac{2(1-\alpha)}{2+2\alpha^3} = \frac{2(1-\alpha)}{2+1+3\alpha^2} = \frac{2(1-\alpha)}{3(1+\alpha^2)}$$

5. a) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f représentative de f au point d'abscisse $x=0$.

T admet pour équation : $y = f'(0)\times(x-0)+f(0) = -1\times x+1 = -x+1$

$$T: y=-x+1$$

b) Étudier la position relative de T par rapport à C_f.

Etutions le signe de $f(x)-(-x+1)$

$$f(x)-(-x+1) = \frac{1-x}{1+x^3}-(-x+1) = \frac{1-x-(-x+1)(1+x^3)}{1+x^3} = \frac{1-x-(-x-x^4+1+x^3)}{1+x^3}$$
$$= \frac{1-x+x+x^4-1-x^3}{1+x^3} = \frac{x^3(x-1)}{1+x^3}$$

Sur l'intervalle $]-1;+\infty[$, $1+x^3>0$ donc le signe de $f(x)-(-x+1)$ est le même que celui de $x^3(x-1)$.

Dressons un tableau de signe :

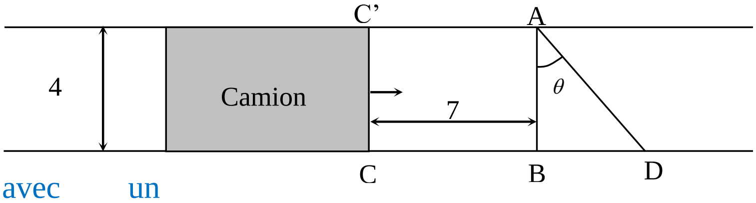
x	-1		0		1		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)*x$^3		$+$	0	$-$	0	$+$	

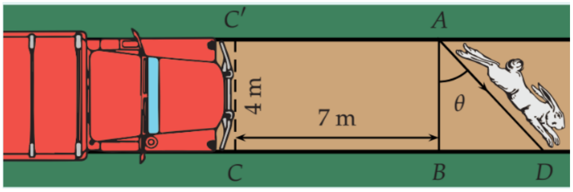
On peut en déduire que :

- C_f est au dessus de T sur l'intervalle $]-1\,;0[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.
- C_f est en dessous de T sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
- C_f et T se coupent aux points d'abscisse $x=0$ et $x=1$.

Exercice 3 (5 points) D'après Nouvelle-Calédonie - déc. 2005

Un camion, occupant les 4 mètres de large d'un chemin rectiligne, arrive à la vitesse de 60 km·h $^{-1}$ à proximité d'un lapin. Au moment où le camion n'est plus qu'à 7 mètres du lapin, celui-ci sursaute et traverse le chemin en ligne droite à 30 km·h $^{-1}$.
Sur le schéma ci-dessous : le segment $[CC']$ représente l'avant du camion ; le lapin va du point A au point D





avec un angle $\theta = \widehat{BAD}$ où $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).

1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

- On a dans le triangle rectangle ABD, $\cos\theta = \frac{\text{AB}}{\text{AD}}$ (*les distances sont exprimées en mètres*).

$$AD.cos\theta = AB = 4 \Leftrightarrow \boxed{AD = \frac{4}{cos\theta}} \text{ (puisque } \theta < \frac{\pi}{2}\text{)} .$$

- De même $\tan\theta = \frac{\text{BD}}{\text{AB}} = \frac{\text{BD}}{4} \Leftrightarrow$ BD $= 4\tan\theta$ et $\boxed{CD = 7 + 4\tan\theta}$
- On sait que $v = \frac{d}{t} \Leftrightarrow t = \frac{d}{v}$ (attentions ici les distances sont en m et les vitesse en $km.h^{-1}$)

$$t_1 = \frac{\frac{4\times 10^{-3}}{\cos\theta}}{30} = \frac{4\times 10^{-3}}{30\cos\theta} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{(7+4\tan\theta)\times 10^{-3}}{60}$$

2. Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si :

$$\frac{7}{2} + \frac{2\sin\theta - 4}{\cos\theta} > 0$$

Le lapin aura pu traverser sans encombre si $t_1 < t_2 \Leftrightarrow$

$$10^3 \times 60 \times \frac{4\times 10^{-3}}{30\cos\theta} < 10^3 \times 60 \times \frac{(7+4\tan\theta)\times 10^{-3}}{60} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8}{\cos\theta} < 7 + \frac{4\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7 + \frac{4\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{8}{\cos\theta} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7}{2} + \frac{2\sin\theta - 4}{\cos\theta} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\theta) > 0$$

3. On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + \frac{2\sin\theta - 4}{\cos\theta}$ pour $\theta \in [0\,;\frac{\pi}{2}[$

a. Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\frac{\pi}{2}[$ et que, pour tout $x \in [0\,;\frac{\pi}{2}[$, $f'(\theta) = \frac{2-4\sin\theta}{\cos^2\theta}$.

Les fonctions $\theta \mapsto 2 - 4\sin\theta$ et $\theta \mapsto \cos\theta$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc en particulier sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$ de plus, $\theta \mapsto \cos\theta$ est non nulle sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. On peut donc en déduire que la fonction $\theta \mapsto \frac{2-4\sin\theta}{\cos\theta}$ est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient.

Par somme, la fonction f est donc dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

$$f'(\theta) = \frac{(2\cos\theta)\cos\theta - (2\sin\theta - 4)(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta - 4\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2 - 4\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

b. Déterminer le signe de f' sur l'intervalle $[0\,;\frac{\pi}{2}[$.

$\cos^2\theta > 0$ sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$ donc f' a le même signe que $2 - 4\sin\theta$.

$$2 - 4\sin\theta \geq 0 \Leftrightarrow \sin\theta \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$$

Conclusion :

- $f'(\theta) \geq 0$ si $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ et
- $f'(\theta) < 0$ si $x \in \left]\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

c. Déterminer $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} f(\theta)$ puis dresser le tableau de variation de f.

$\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}(2\sin\theta - 4) = -2$ et $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos\theta) = 0^+$ donc, par quotient puis par somme, $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-} f(\theta) = -\infty$

La fonction f est donc croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Or $f(0) = \frac{7}{2} - 4 = -\frac{1}{2} < 0$;

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \times \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{7}{2} - \frac{6\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}03359 > 0.$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$f\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 0{,}03$	$\searrow$	$-\infty$

d. Montrer que l'équation $f(\theta) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[0\,;\frac{\pi}{2}[$.

f est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$ et change de signe donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(\theta) = 0$ admet une unique solution θ_1 sur $\left[0\,;\frac{\pi}{6}\right]$.

De la même façon, l'équation $f(\theta) = 0$ admet une unique solution θ_2 sur $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Finalement l'équation $f(\theta) = 0$ admet exactement deux solutions sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

4. Sous quelles conditions le lapin pourra-t-il survivre à cette traumatisante expèrience !

On peut déduire de la questtion précédente que la fonction f est stictement positive sur l'intervalle $]\theta_1;\ \theta_2[$.
La fonction est positive si $0{,}4 \leq \theta \leq 0{,}64$ (environ) soit si l'angle mesure entre 23 et 37 degrés environ.
La survie du lapin ce fera donc dans ces conditions.

Exercice 4 de Spécialité (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ avec a réel strictement positif et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le but est de déterminer M^{1000}de trois façons.

1. Méthode n°1

a) Calculer M^2, M^3 et M^4.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4a & 1 \end{pmatrix}$$

b) Conjecturer puis démontrer l'expression de M^n en fonction de n.
En déduire M^{1000}.

Il semblerait que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$. Montrons ce résultat par récurrence.

Initialisation : effectuée à la question a)

Hérédité : On suppose que $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$ jusqu'à un certain rang n .

$$M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)a & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : pour tout entier naturel non nul, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}$.

On peut en déduire que $M^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1000a & 1 \end{pmatrix}$.

2. Méthode n°2

a) Vérifier que $M^2 = 2M - I$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2a & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2M - I$$

b) En déduire M^3 et M^4 en fonction de M et I .

$$M^3 = M^2 \times M = (2M - I) \times M = 2M^2 - IM = 2(2M - I) - M = 3M - 2I$$
$$M^4 = M^3 \times M = (3M - 2I) \times M = 3M^2 - 2IM = 3(2M - I) - 2M = 4M - 3I$$

c) Conclure.

On peut donc penser que $M^n = nM - (n-1)I$. Montrons ce résultat par récurrence pour $n \geq 2$.

Initialisation : effectuée à la question a)

Hérédité : On suppose que $M^n = nM - (n-1)I$ jusqu'à un certain rang n .

$$M^{n+1} = M^n \times M = (nM - (n-1)I)M = nM^2 - (n-1)IM = n(2M - I) - (n-1)M$$
$$= (n+1)M - nI$$

Conclusion : pour tout entier naturel non nul, $M^n = nM - (n-1)I$.

On peut en déduire que $M^{1000} = 1000M - 999I$.

3. Méthode n°3

a) Déterminer la matrice A telle que $M = I + A$.

$$M = I + A \Leftrightarrow M - I = A \text{ donc } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Calculer A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) En déduire M^2, M^3 et M^4 en fonction de A et I .

$$M^2 = (I + A)^2 = I^2 + 2IA + A^2 = I + 2A + A^2 = I + 2A$$
$$M^3 = (I + A)^2 \times (I + A) = (I + 2A)(I + A) = I^2 + 3A + 2A^2 = I + 3A$$
$$M^4 = (I + A)^3 \times (I + A) = (I + 3A)(I + A) = I^2 + 4A + 3A^2 = I + 4A$$

d) Exprimer M^{1000} en fonction de A et I .

On peut en déduire que $M^{1000} = I + 1000A$

e) Conclure.

$$M^{1000} = I + 1000A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1000a & 1 \end{pmatrix}$$

Partie B

On donne la matrice carrée d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. A l'aide de la calculatrice, donner A^2 , A^3 et A^4.

```
[A]²
        [[1 0 0]
         [0 1 0]
         [0 0 1]]

[A]^3
     [[1  -4 -4]
      [-1 1   2 ]
      [1  -2 -3]]

[A]^4
        [[1 0 0]
         [0 1 0]
         [0 0 1]]
```

2. En déduire A^n (on ne demande pas de démontrer ce résultat).

D'après les résultats précédents :

- si n est pair alors $n = 2k$ et $A^{2k} = I$
- si n est impair alors $n = 2k + 1$ et $A^{2k+1} = A$

Exercice 4 (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A - QCM

Pour chaque proposition, 4 réponses sont proposées : une seule est exacte.

Donner une seule réponse sans justification (0,5 point par bonne réponse et 0 sinon).

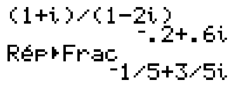
1. Le nombre complexe $(1 + i)^{72}$ est égal à :

~~**a.** 2^{72}~~	~~**b.** $6{,}9 \times 10^{10}$~~	**c.** 2^{36}	~~**d.** 0~~

$(1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ donc $(1 + i)^{72} = ((1 + i)^2)^{36} = (2i)^{36} = 2^{36} \times i^{36} = 2^{36} \times (i^4)^9 = 2^{36}$

2. Le nombre complexe $\frac{1+i}{1-2i}$ est égal à :

~~**a.** $-\frac{1}{2}$~~	~~**b.** $1 - 3i$~~	~~**c.** $3 - i$~~	**d.** $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

À l'aide de la calculatrice (par exemple): 

3. La solution de l'équation $2iz + 1 = 2 - i$ est :

a. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$	~~**b.** $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$~~	~~**c.** $-\frac{1}{3}i$~~	~~**d.** $-1+i$~~

$$2iz + 1 = 2 - i \iff 2iz = 1 - i \iff z = \frac{1-i}{2i} = \frac{-i-1}{2} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

4. La solution de l'équation $z + 2i\bar{z} = 2 - 5i$ est :

~~**a.** 1~~	~~**b.** $\frac{8}{3}-\frac{1}{3}i$~~	~~**c.** $2-\frac{5}{2}i$~~	**d.** $-4+3i$

Posons $z = a + ib$:

$$z + 2i\bar{z} = 2 - 5i \iff a+ib+2i(a-ib) = 2-5i \iff a+2b+i(2a+b) = 2-5i$$

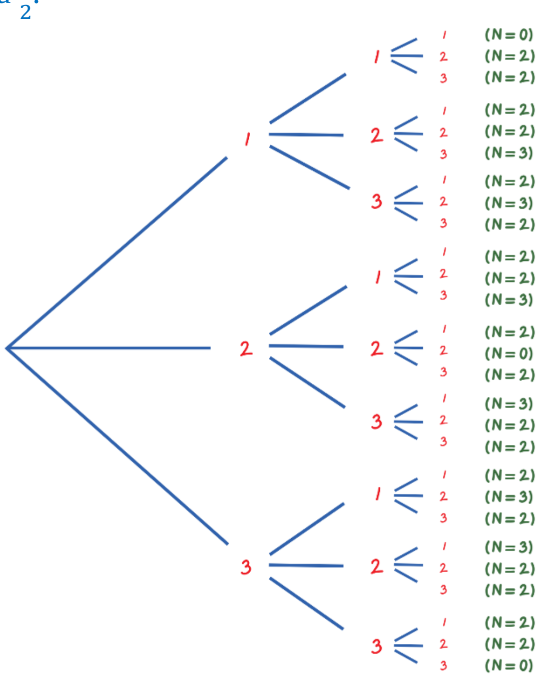
$$\iff \begin{cases} a+2b=2 \\ 2a+b=-5 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2b=2 \\ -4a-2b=10 \end{cases} \iff \begin{cases} -3a=12 \\ a+2b=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-4 \\ b=3 \end{cases}$$

Partie B

Pour chaque affirmation répondre par Vrai ou Faux en justifiant. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Il sera attribué 1 point par bonne réponse correctement justifiée.

1. Une urne contient trois boules indiscernables au toucher portant respectivement les numéros 1, 2 et 3. On tire successivement trois fois une boule avec remise.
On note N la variable aléatoire donnant le nombre de numéros différents obtenus.
Affirmation: L'espérance de N est strictement supérieure à $\frac{3}{2}$.

On peut dresser un arbre afin d'illustrer la situation :



La variable aléatoire N peut prendre les valeurs $\{3 ; 2 ; 0\}$
En effet :
• soit les 3 boules ont le même numéro et donc $N = 0$,
• soit il y a 2 boules avec le même numéro et une 3ème avec un numéro différent et donc $N = 2$,
• soit les 3 boules ont des numéros différents et donc $N = 3$.

Notons que :
• $N = 0$ signifie 0 numéro différent sur les 3 boules,
• $N = 2$ signifie 2 numéros différents sur les 3 boules,
• $N = 3$ signifie 3 numéros différents sur les 3 boules.

On peut déduire de l'arbre ci-contre la loi de probabilité de N donné par le tableau ci-dessous :

$N=k$	0	2	3
$P(N=k)$	$\frac{3}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{6}{27}$

On obtient alors $E(N) = 0\times\frac{3}{27}+2\times\frac{18}{27}+3\times\frac{6}{27} = 2 > \frac{3}{2}$ donc **l'affirmation est vraie**.

2. Une entreprise produit en grande série des véhicules électriques.
On admet que la probabilité qu'un véhicule ne soit pas conforme vaut $0{,}03$.
On prélève au hasard un lot de 100 véhicules en vue de les proposer à la location dans une grande agglomération (on admet que la population est suffisamment importante pour assimiler la constitution de ce lot à 100 tirages successifs avec remise).
Affirmation: la probabilité qu'aucun véhicule de ce lot ne soit défectueux est égal à $1 - 0{,}03^{100}$.

Soient les événements: C = " conforme ", et C = " non conforme ".
On désigne par X le nombre de véhicules non conformes sur un lot de 100 véhicules prélevé au hasard.
Nous sommes en présence de 100 épreuves aléatoires identiques et indépendantes.
La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de C suit donc une loi binômiale de paramètres: $\boldsymbol{n = 100}$ et $\boldsymbol{p = 3\% = 0,03}$.
Ici, il s'agit de calculer: P (X = 0). **(aucun véhicule de ce lot ne soit défectueux)**

$$P(X=0) = (1-0{,}03)^{100} \neq 1-(0{,}03)^{100}$$

En effet, en genéral, $(a-b)^n \neq a^n - b^n$
Donc l'affirmation est fausse.

3. On considère l'algorithme suivant.

Entrée :	Saisir un entier naturel n supérieur ou égal à 1
Traitement :	Affecter à A la valeur 0. Pour k allant de 1 à n Affecter à A la valeur $A + \frac{1}{k}$ Fin pour Affecter à A la valeur nA
Sortie :	Afficher A

Affirmation : pour $n = 6$, le résultat affiché est 14,7.

Faisons un tableau pour trouver la valeur de A lorsque $n = 6$.

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$A=0$	$A=0+\frac{1}{1}=1$	$A=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	$A=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$	$A=\frac{11}{6}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}$	$A=\frac{25}{12}+\frac{1}{5}=\frac{137}{60}$	$A=\frac{137}{60}+\frac{1}{6}=\frac{49}{20}$

Puis l'algorithme affecte à A la valeur nA soit $6 \times \frac{49}{20} = 14{,}7$.
Donc l'affirmation est vraie.