FONCTION EXPONENTIELLE

I. Définition de la fonction exponentielle

Lemme (résultat intermédiaire)

S'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

Supposons qu'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)f(-x)$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)f(-x) + f(x)\big(-f'(-x)\big) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction h est donc constante et égale à $h(0) = f(0)f(-0) = 1$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)f(-x) = 1$ ce qui montre que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Théorème

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Preuve :

On prouve ici seulement l'unicité (pour la preuve de l'existence : exercice de la fiche).

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Supposons alors qu'il existe une autre fonction g telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.

Comme g ne s'annule pas d'après le lemme précédent, on peut poser $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

k est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, on a : $k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g^2(x)} = 0$.

Donc la fonction k est constante et égale à $k(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ donc $f = g$ d'où l'unicité.

Définition

La fonction exponentielle est la fonction notée **exp** définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\exp' = \exp \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1$$

II - Propriétés de la fonction exponentielle

Théorème - Relation fonctionnelle

Pour tous réels x et y :

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Preuve :

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$ et y réel.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a $f'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$ donc f est constante.

Ainsi, $f(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = f(0) = \frac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp(y)$ d'où $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Exercice 1

y est un nombre réel fixé et on note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \exp(x + y) \times \exp(-x)$$

a) Démontrer que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que, pour tout nombre réel x, $h(x) = \exp(y)$

c) Retrouver alors, que pour tous nombres réels x et y,

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Exercice 2

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \exp(x) + \exp(-x)$ et $g(x) = \exp(x) - \exp(-x)$.

a) Déterminer la fonction dérivée de chacune de ces fonctions.

b) Expliquer pourquoi, pour tout nombre réel x :

$$f(x) = \frac{[\exp(x)]^2 + 1}{\exp(x)} \qquad g(x) = \frac{(\exp(x) - 1)(\exp(x) + 1)}{\exp(x)} \qquad f^2(x) - g^2(x) = 4$$

Propriété

Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :

① $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ ② $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ ③ $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

Preuve :

① $1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x)\exp(-x)$ donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

② $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x)\exp(-y) = \exp(x) \times \dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

③ Pour $p \in \mathbb{N}$, on démontre par récurrence. Voici l'initialisation et l'hérédité :

- $\exp(0x) = \exp(0) = 1$ et $((\exp(x))^0 = 1$ puisque $\exp(x) \neq 0$.
- Supposons que pour un certain entier p donné, on ait $\exp(px) = (\exp(x))^p$.

  Alors :

  $\exp((p+1)x) = \exp(px + x) = \exp(px)\exp(x) = (\exp(x))^p\exp(x) = (\exp(x))^{p+1}$.

  Et si $-p \in \mathbb{N}$, alors $(\exp(x))^p = (\exp(-x))^{-p} = \exp(-p(-x)) = \exp(px)$.

Exemple $(\exp(1) - \exp(-1))^2 = (\exp(1))^2 - 2 \times \exp(1) \times \exp(-1) + (\exp(-1))^2$

$= \exp(1 \times 2) - 2\exp(1-1) + \exp(-1 \times 2)$

$= \exp(2) - 2\exp(0) + \exp(-2) = \exp(2) - 2 + \exp(-2)$.

Exo livre page 123

1 **Vrai ou faux ?** Pour tout réel x, on a :

a. $\exp(x^2) = (\exp(x))^2$; **b.** $\exp(-2x) = \dfrac{1}{(\exp(x))^2}$;

c. $\exp(1-x) = \dfrac{e}{\exp(x)}$;

d. $\exp(x) + \exp(x) = 2\exp(x)$.

III - Étude de la fonction exponentielle

1) Signe et variations

Propriété

Sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle est : **continue**, **strictement positive** et **strictement croissante**

Preuve :

- Par définition, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right)$ d'après la relation fonctionnelle.

  Ainsi, $\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$ et comme $\exp(x) \neq 0$, alors $\exp(x) > 0$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\exp(x))' = \exp(x) > 0$. Donc, $x \mapsto \exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Limites en $\pm\infty$

Propriété

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$$

Preuve :

- La fonction $f : x \mapsto \exp(x) - x - 1$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = \exp(x) - 1$.

  Or, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :

  $$x \geq 0 \Rightarrow \exp(x) \geq 0$$

  Ainsi, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante et minorée par $f(0) = \exp(0) - 0 - 1 = 0$.

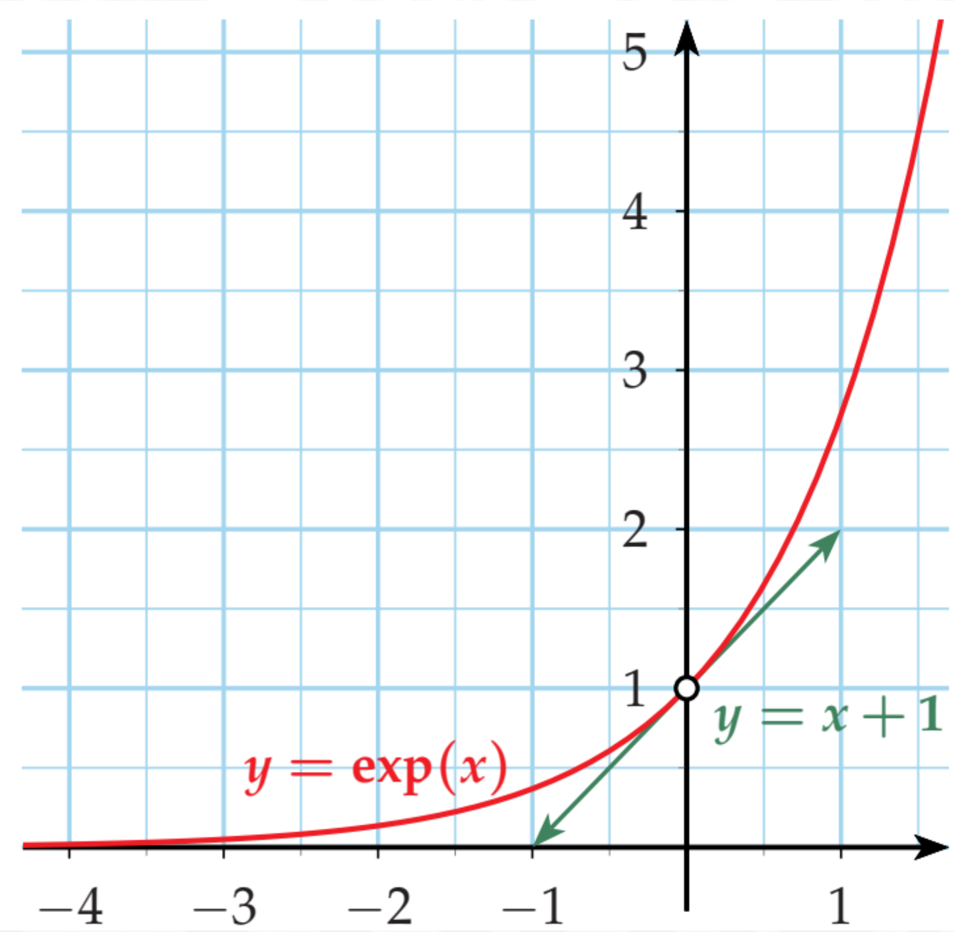
  D'où, $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \exp(x) - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \exp(x) \geq 1 + x$.

  Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 + x) = +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$.

- En posant $X = -x$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \exp(-X) = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{\exp(X)} = 0$.

3) Tableau de variation et courbe représentative

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Remarques :

- La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote à la courbe représentative en $-\infty$.
- La droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 0.

4) Une nouvelle notation

Définition

L'image de 1 par la fonction exp est notée **e**. Ainsi $\exp(1) = e$.

Remarques :

- e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper. Comme π, c'est un nombre irrationnel et transcendant.

  Sa valeur approchée est : $e \approx 2{,}718\,281\,828$.

- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n = e^n$.

  On étend cette relation aux réels et on peut alors écrire, pour tout réel x :

  $$\boldsymbol{\exp(x) = e^x}$$

On peut ainsi réécrire avec une nouvelle notation tout ce qu'on a vu précédemment.

La fonction exponentielle est la fonction $x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

$e^0 = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Les autres propriétés écrites ci-après sont analogues aux propriétés des puissances.

Propriété

Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{nx} = (e^x)^n$$

Exemple

Le calcul donné dans l'exemple précédent s'effectue bien plus simplement :

$$\begin{aligned}(\exp(1) - \exp(-1))^2 &= (e - e^{-1})^2 \\ &= e^2 - 2ee^{-1} + (e^{-1})^2 \\ &= e^2 - 2e^{1-1} + e^{-2} \\ &= e^2 - 2 + e^{-2}\end{aligned}$$

5) Équations et inéquations

Propriété

Pour tous réels x et y :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \qquad e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

Preuve :

Ces propriétés sont des conséquences directes de la continuité et de la stricte croissance de $x \mapsto e^x$.

Ainsi, $e^x = e^y \Leftrightarrow e^x e^{-y} = 1$

$\Leftrightarrow e^{x-y} = 1$

$\Leftrightarrow x - y = 0$

$\Leftrightarrow x = y.$

Remarque :

On a les équivalences analogues en remplaçant le symbole $<$ par $>$, $\leq$ ou $\geq$.

MÉTHODE 1 - Résoudre une équation ou une inéquation avec exponentielles

Pour résoudre une équation d'inconnue x réel comportant des exponentielles :

1. On détermine l'ensemble des valeurs qu'on peut donner à x.
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions des équations et inéquations.

   On essaye selon le cas de se ramener à :

   - Une équation de la forme $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ où u et v sont deux fonctions.

     Alors, $e^{u(x)} = e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$ et, éventuellement,

     $$u(x) = v(x) \Leftrightarrow u(x) - v(x) = 0.$$

   - Une équation qu'on sait résoudre après avoir effectué un changement de variable.

La méthode est analogue pour résoudre une inéquation.

Exemple

$e^{x^2+2x-3} = 1$	$2e^{2x} - e^x - 1 = 0$	$e^{\sqrt{3x-5}} < e$	$\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} \geq e^{x^2-1}$

7) D'autres limites

Propriété

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Preuve :

Preuve :

Soit la fonction $f: x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$ sur $[0; +\infty[$. On a $f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x - 1$.

Or, $x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$ donc $f''(x) \geq 0$.

Ainsi, f' est croissante et minorée par $f'(0) = 1$. Donc, $f'(x) \geq 0$.

Par conséquent, f est croissante et minorée par $f(0) = 1$. Donc, $f(x) \geq 0$ soit $e^x - \frac{x^2}{2} \geq 0$.

D'où, pour $x > 0$, $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$

Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc, par comparaison, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

2. Par inverse de la limite précédente, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Donc, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \lim\limits_{x \to +\infty} -xe^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0$ d'après ce qui précède.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ est égale au nombre dérivée de $x \mapsto e^x$ en 0 soit $e^0 = 1$.

Remarque :

On généralise pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

MÉTHODE 2 – Déterminer une limite de fonction avec exponentielle

Lorsque une limite de fonction comportant des exponentielles est *a priori* indéterminée (formes « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $(+\infty) + (-\infty)$ » ou « $0 \times \infty$ »), on essaye, selon le cas, de transformer l'écriture ou de changer de variable.

Exemple

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{2x} - xe^x)$	***2.*** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}+1} \right)$	***3.*** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}+1} \right)$

IV - Fonction composée e^u

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction e^u, composée de u suivie de $x \mapsto e^x$, est dérivable sur I et on a $(e^u)' = u'e^u$.

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
La fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc la fonction f, composée de racine carrée suivie d'exponentielle, est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

Remarque :

e^u varie comme u. Par exemple, si u est strictement décroissante sur I, alors pour tous a et b dans I :

$$a < b \Rightarrow u(a) > u(b)$$

Or, exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $u(a) > u(b) \Rightarrow e^{u(a)} > e^{u(b)}$. Ainsi, e^u est strictement décroissante sur I.

Exemple

$x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto e^{-x}$ aussi.