FONCTION EXPONENTIELLE

I. Définition de la fonction exponentielle

Lemme (résultat intermédiaire)

S'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, alors elle ne …………… sur $\mathbb{R}$.

Preuve :…….

Théorème

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que … … …. et … … … ….

Preuve :………

Définition

La fonction exponentielle est la fonction notée exp définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$exp' = exp \quad \text{et} \quad exp(..) = \ \dots$$

II. Propriétés de la fonction exponentielle

Théorème - Relation fonctionnelle

Pour tous réels x et y :

$$\exp(x+y) = \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Preuve :

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ définie sur $\mathbb{R}$ et y réel.

… … …

Propriété

Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :

① $\exp(-x)$ … … … ② $\exp(x-y)$ … …. ③ $\exp(nx)$ … … ….

Preuve :…………

Exemple

$(\exp(1) - \exp(-1))^2 = \dots$

III. Étude de la fonction exponentielle

1. Signe et variations

Propriété

Sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle est : **……………., ………………………. et ………………………….**

Preuve :

……………

2. Limites en $\pm\infty$

Propriété

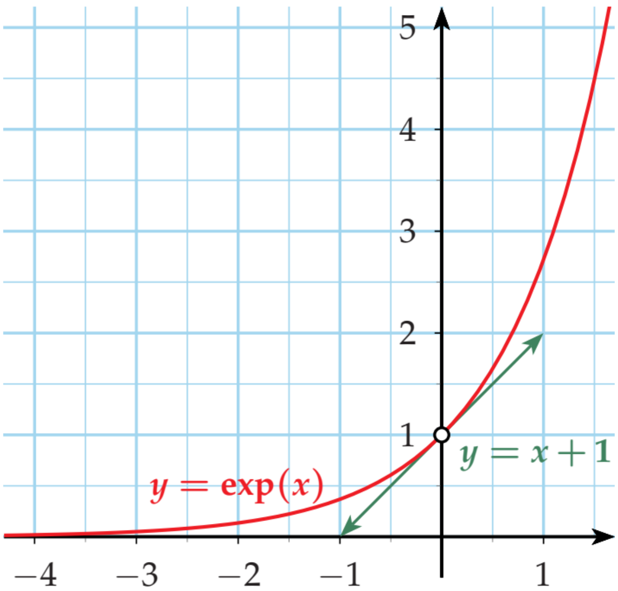
$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = \ldots \ldots$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \ldots \ldots$

Preuve :

- La fonction $f : x \mapsto \exp(x) - x - 1$ est dérivable sur $[0; +\infty[$
  ……….

3. Tableau de variation et courbe représentative

x	$-\infty$		$+\infty$
$\exp(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Remarques :

- La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est
  ……………………………………………….
- La droite d'équation $y = x + 1$ est
  ……………………………………………….

4. Une nouvelle notation

Définition

L'image de 1 par la fonction exp est notée ……. Ainsi … … … … …..

Remarques :

- e est appelé nombre d'Euler ou constante de Néper. Comme π, c'est un nombre irrationnel et transcendant. Sa valeur approchée est : $e \approx 2{,}718\,281\,828$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(n) = \exp(1 \times n) = (\exp(1))^n = e^n$.
  On étend cette relation aux réels et on peut alors écrire, pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$.

On peut ainsi réécrire avec une nouvelle notation tout ce qu'on a vu précédemment.
La fonction exponentielle est la fonction $x \mapsto e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.
$e^0 = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$. De plus, $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.
Les autres propriétés écrites ci-après sont analogues aux propriétés des puissances.

Propriété

Pour tous réels x et y et pour tout entier relatif n :
$e^{x+y} = \ldots\ldots\ldots$ $e^{-x} = \ldots\ldots..$ $e^{x-y} = \ldots\ldots..$ $e^{nx} = \ldots\ldots..$

Exemple

Le calcul donné dans l'exemple précédent s'effectue bien plus simplement :

$$(\exp(1) - \exp(-1))^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

5. Équations et inéquations

Propriété

Pour tous réels x et y :
$e^x = e^y \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots.$ $e^x < e^y \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots..$

Preuve :

Ces propriétés sont des conséquences directes de la continuité et de la stricte croissance de $x \mapsto e^x$.
Ainsi, $e^x = e^y \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Remarque :

On a les équivalences analogues en remplaçant le symbole $<$ par $>$, $\leq$ ou $\geq$.

MÉTHODE 1 - Résoudre une équation ou une inéquation avec exponentielles

Pour résoudre une équation d'inconnue x réel comportant des exponentielles :

1. On détermine l'ensemble des valeurs qu'on peut donner à x.
2. On essaye selon le cas de se ramener à :
   - Une équation de la forme $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ où u et v sont deux fonctions.
     Alors, $e^{u(x)} = e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$ et, éventuellement,
     $u(x) = v(x) \Leftrightarrow u(x) - v(x) = 0$.
   - Une équation qu'on sait résoudre après avoir effectué un changement de variable.

La méthode est analogue pour résoudre une inéquation.

Exemple

Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions des équations et inéquations.

$e^{x^2+2x-3} = 1$	$2e^{2x} - e^x - 1 = 0$	$e^{\sqrt{3x-5}} < e$	$\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-4}} \geq e^{x^2-1}$

6. D'autres limites

Propriété

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \ldots \ldots$ $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = \ldots \ldots$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ldots \ldots$

Preuve :

Soit la fonction $f : x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$ sur $[0; +\infty[$.

Remarque :

On généralise pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \ldots \ldots$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \ldots \ldots$

MÉTHODE 2 – Déterminer une limite de fonction avec exponentielle

Lorsque une limite de fonction comportant des exponentielles est *a priori* indéterminée (formes « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « $(+\infty) + (-\infty)$ » ou « $0 \times \infty$ »), on essaye, selon le cas, de transformer l'écriture ou de changer de variable.

Exemple

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{2x} - xe^x)$	***2.*** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}+1}\right)$	***3.*** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}+1}\right)$

IV. Fonction composée e^u

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction e^u, composée de u suivie de $x \mapsto e^x$, est dérivable sur I et on a $(e^u)' = \ldots \ldots \ldots \ldots$

Exemple

Soit la fonction $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
La fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc la fonction f, composée de racine carrée suivie d'exponentielle, est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $f'(x) = \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Remarque :

e^u varie comme u. Par exemple, si u est strictement décroissante sur I, alors pour tous a et b dans I :

… … … … … … … … … … ….

Or, exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc

… … … … … … … … … … ..

Ainsi, e^u est strictement décroissante sur I.

Exemple

$x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto e^{-x}$ aussi.