Exponentielle – Exercices Sésamath

Calculs algébriques

8 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\exp(3)\exp(5)$
2) $\exp(-2)\exp(4)$
3) $\dfrac{1}{\exp(-5)}$
4) $(\exp(5))^3$

9 Simplifier les expressions suivantes :

1) $e^3 e^4$
2) $e^4 e^{-4}$
3) $\dfrac{e^5 e^{-3}}{e^{-2}}$
4) $\left(e^4\right)^3 e^4$
5) $\left(e^3\right)^{-2} e^5$
6) $\dfrac{e-\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$

10 Simplifier les expressions suivantes :

1) $\left(e^5-e^4\right)^2-\left(e^5+e^4\right)^2$
2) $\left(e^2+e^{-2}\right)\left(e^2-e^{-2}\right)$
3) $\dfrac{e^3-e^{-3}}{e^3+e^{-3}}$
4) $\sqrt{(e^2+1)^2-(e^2-1)^2}$
5) $e\,e^{2x+1}$
6) $e^{3-2x}e^{x+5}$
7) $\left(e^{5x}\right)^2$
8) $e^{9x}-2\left(e^{3x}\right)^3$

12 Simplifier les expressions suivantes :

1) $(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$
2) $(e^x-e^{-x})^2-e^{-x}\left(e^{3x}-e^{-x}\right)$
3) $(e^x-e^{-x})\left(e^{2x}+e^x+1\right)$
4) $\left(e^{3x}\right)^2+\left(e^{-3x}\right)^2-\left(e^{3x}-e^{-3x}\right)^2$
5) $\left(e^{3x}\right)^2-e^{2x}\left(e^{2x}+e^{-2}\right)^2$

Équations - Inéquations

13 ► MÉTHODE 1 p. 122

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $\exp(x)=e$
2) $\exp(-x)=1$
3) $\exp(2x-1)=e$
4) $e^{x^2+x}=1$
5) $e^x-e^{-x}=0$
6) $e^{x^2+5}=\left(e^{x+2}\right)^2$
7) $e^x+e^{-x}=0$
8) $e^{3x+1}=e^{-2x+3}$
9) $e^{2x}-1=0$
10) $x\,e^{2x}-2e^{2x}=0$

14 Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1) $\exp(x)<e$
2) $\exp(-x)\geqslant 1$
3) $e^{2x-1}>e^x$
4) $e^x+e^{-x}<2$
5) $e^x<1$
6) $e^{-x}>0$
7) $e^{-x}>1$
8) $e^x-e^{-x}>0$
9) $e^{2x}-1\geqslant 0$
10) $x\,e^{-x}-3e^{-x}<0$

15

1) Déterminer les racines du polynôme :
$$P(X)=X^2+4X-5.$$
2) En déduire les solutions de l'équation $e^{2x}+4e^x=5$.
3) Résoudre les équations suivantes :
   a) $e^{2x}+e^x-2=0$
   b) $e^{2x+1}+e^{x+1}-2e=0$
   c) $e^x-2e^{-x}+1=0$

16 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\dfrac{e^x+3}{e^x-1}>0$
2) $-e^{2x}-e^x+2>0$
3) $e^{2x}+2e^x-3\geqslant 0$
4) $e^{2x}+e^x-2<0$

17 Résoudre dans $\mathbb{R}$.

1) $e^{x^2+2}=\dfrac{e^{2x}}{e}$
2) $2e^{2x}+5e^x+3=0$
3) $e^x+e^{-x}>\sqrt{e}+\dfrac{1}{\sqrt{e}}$
4) $e^{x^2}+1\leqslant 2$

Calculs de limites

19 ► MÉTHODE 2 p. 123

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}$
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x}$
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}$
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1}$
5) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x+1}$
6) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+1}$
7) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}$
8) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} e^{\frac{1}{x}}$
9) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} e^{-\frac{1}{x}}$

21 Avec un changement de variable

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :
$$f(x)=\frac{2}{x-1}e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

1) On pose $X=\dfrac{2}{x-1}$. Montrer que $f(x)=e\,X\,e^X$.
2) En déduire $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$.

24 Les questions sont indépendantes.

1) Soit la suite (u_n) définie pour $n\geqslant 1$ par :
$$u_n=1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-1}{n}}.$$
Déterminer la limite de la suite (u_n).
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}\left(x^2+x\right)$$
Déterminer les limites en $-\infty$ de la fonction f.
3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$g(x)=\frac{x}{e^x-1}.$$
La limite de g en 0 est-elle finie ?
4) Étudier les asymptotes à la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par :
$$h(x)=\frac{x\,e^{-x}+1}{x+1}.$$

Dérivées

25 Soit f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1) $f(x)=e^{-5x+2}$ 2) $f(x)=e^{3x^2-x}$ 3) $f(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$

26 Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la donnée de $f(x)$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer une expression de $f'(x)$.

1) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

2) $f(x) = \dfrac{x}{2}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$

3) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+x}$

4) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x+1}$

5) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$

6) $f(x) = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^{3x+1}$

7) $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{x}}$

8) $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$

29 Soit la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{x-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ a \text{ réel} & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

30 Soit la fonction $g : t \mapsto t^n\,\mathrm{e}^{-t}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $g'(t) = \mathrm{e}^{-t}(n-t)t^{n-1}$.

2) $g^{(k)}$ désigne la fonction dérivée k-ième de g.
Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{t}\,g^{(k)}$ est une fonction polynôme de degré n.

- **Un peu de tout !**

31 VRAI/FAUX

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Étudier l'exactitude de chaque proposition. Justifier

1) f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$.

2) f est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

3) L'axe des abscisses est une asymptote de $\mathscr{C}$.

4) L'axe des ordonnées est une asymptote de $\mathscr{C}$.

5) $\mathscr{C}$ admet une tangente d'équation $y = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

6) $\mathscr{C}$ admet une tangente d'équation $y = x$.

7) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

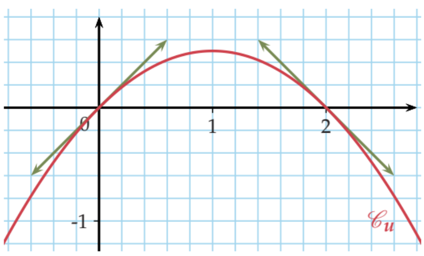
8) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

32 Soit u une fonction polynôme de degré 2 et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$. On a représenté dans le repère ci-dessous $\mathscr{C}_u$ et deux tangentes à $\mathscr{C}_u$.
Les réponses seront données à l'aide du graphique.

1) Peut-on affirmer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions ?

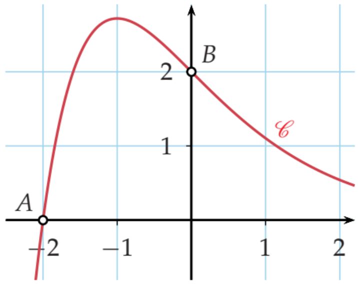
2) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

3) Donner le tableau de variation de la fonction f.



33 Une courbe $\mathscr{C}$ qui passe par les points $A(-2\,;\,0)$ et $B(0\,;\,2)$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$



1) À l'aide du graphique, déterminer a et b en justifiant.

2) En déduire le tableau de variation de f.

40 ALGO

Le but est de déterminer un encadrement d'amplitude donnée de la solution de l'équation (E) : $\mathrm{e}^{x} = 2$.

1) Démontrer que (E) a une unique solution $\alpha \in [0\,;\,1]$.

2) À partir de l'intervalle $[0\,;\,1]$, on procède par **dichotomie** pour réduire plusieurs fois de moitié la longueur de cet intervalle.
Quel est l'encadrement de α après le premier pas :

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 0{,}5 \quad \text{ou} \quad 0{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 1\,?$$

3) On a traduit le processus par l'algorithme suivant où les variables `a`, `b`, `c` et `p` sont des nombres.

```
a PREND_LA_VALEUR 0
b PREND_LA_VALEUR 1
p PREND_LA_VALEUR b - a
TANT_QUE p > 0.1
    c prend la valeur (a + b) / 2
    SI ... ALORS a PREND_LA_VALEUR c
    SINON ... PREND_LA_VALEUR ...
    p PREND_LA_VALEUR ...
Fin TANT_QUE
AFFICHER ...
```

Compléter l'algorithme pour qu'il donne les bornes d'un encadrement de α d'amplitude inférieure à 0,1.

4) Modifier l'algorithme afin que l'utilisateur puisse définir au départ l'amplitude souhaitée.

5) Programmer l'algorithme afin d'encadrer α avec une amplitude inférieure à 10^{-5}.
Combien de tours de la boucle `TANT_QUE` y a-t-il eu ?

41 ALGO

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Le but est de trouver le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 5$.