Dérivation – Fonctions cosinus et sinus

I. Rappels

1) Dérivabilité et fonction dérivée

Définition – Nombre dérivé

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soient a et h deux réels tels que a et $a+h$ appartiennent à I.
On dit que la fonction f est …………………… s'il existe un nombre réel l, tel que : … … … … … … … … …..
Le réel l est alors appelé le …………………………… et est noté … … … ….

Définition – Fonction dérivable, fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction … … … … … … … … … .. si f est dérivable en ……………………..
La fonction $f': x \mapsto f'(x)$ définie sur I est appelée la ………………………..

Remarques :

- Une fonction peut être définie en a mais non dérivable en a.
  Par exemple, prenons la fonction racine carrée qui est définie en 0.
  On a … …
  Donc, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

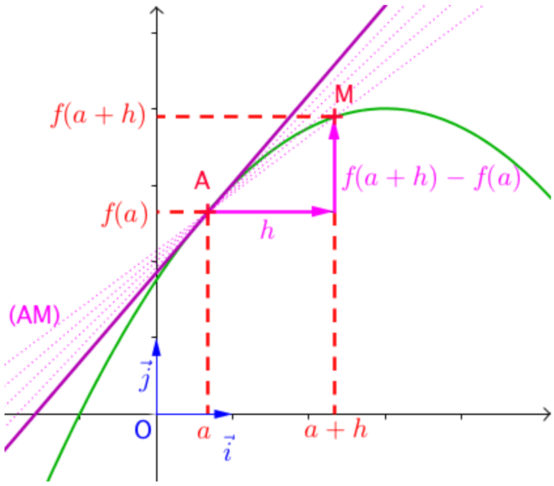
- Les physiciens expriment une variation à l'aide du symbole Δ. Ainsi, entre x et x_0, elle est notée … … … … … … .. et … … … … … … … ….. On a alors : $f'(x_0) =$ … … … …..

- On peut noter $f'(a)$ également … … … … .. qui exprime la différentielle de la fonction f en a par rapport à la variable x. Cela sert à écarter toute ambiguïté s'il y a d'autres variables.

2) Application de la dérivation

Définition – Tangente en un point à une courbe

Soit une fonction f dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère
La tangente à la courbe C_f au point A est la droite
……..
Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est :
… … … … … … … … … … … … … ….



Exemple :

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

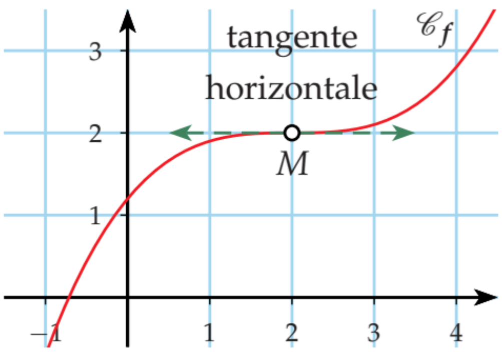
Propriétés - Du signe de $f'(x)$ aux variations de f

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

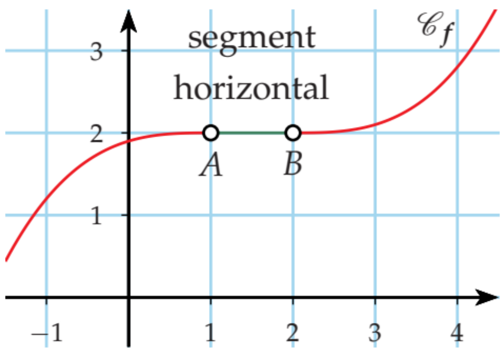
- Si f' est strictement positive sur I, sauf ……………………………………………………………………………..,
……..
- Si f' est strictement négative sur I, sauf ……………………………………………………………………………..,
……..
- Si f' est nulle sur I, alors f ………………………………..

Remarque

« ……………………………………………………………………………………………………… » signifie que la courbe représentative de f peut admettre ………………………………………….. mais ne peut avoir à aucun endroit la forme ……………………………………………………………..



f' est strictement positive sauf en 2 où elle s'annule donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



*f' est strictement positive sur $]-\infty\,;1[\cup]2\,;\infty[$ donc f n'est pas **strictement** croissante sur $\mathbb{R}$.*

3) Calcul de dérivées

Propriété - Dérivées des fonctions usuelles

On désigne par $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f.
Toutes les fonctions du tableau ci-dessous sont dérivables sur $\mathcal{D}_f$ à l'exception de la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en zéro.

Fonction f	**Ensemble de définition de f**	**Dérivée f'**
$f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	…………..
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	……………
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	… … … … ….
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	……………

Exemples

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6$
b) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^4}$

Propriété - Opération sur les fonctions dérivées

Soit un réel k et deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I.

- Les fonctions $u + v$, ku et uv sont dérivables sur I.
- Les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I sauf là où v s'annule.

Fonction	$u + v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
Dérivée	…………	…………	……………	……….	…………….

Exemples

a) $f(x) = (2x^2 - 5x)(3x - 2)$
a) $g(x) = \frac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

II. Dérivées de fonctions composées

Dans cette partie, u désigne une fonction et I un intervalle.

Propriété - Dérivée de $\sqrt{u}$

Si u est dérivable et strictement positive sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})'$ … … … …

Preuve

Soit un réel $a \in I$ et un réel $h > 0$ tel que $a + h$ soit dans I. ……..

Exemple

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$$

Propriété – Dérivée de u^n et u^{-n}

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si u est dérivable sur I alors :

- La fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' =$………..
- La fonction u^{-n} est dérivable sur I sauf là où u s'annule et $(u^{-n})' =$………..

Preuve ……

Exemple

$$f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$$

Propriété – Dérivée de $x \longmapsto u(ax + b)$

Soit deux réels a et b. Si u est dérivable sur I alors :

La fonction $f : x \mapsto u(ax + b)$ est dérivable là où $(ax + b) \in I$ et

$f'(x) =$……………

Preuve : ……

MÉTHODE 1 - Dériver une fonction composée

1. *On reconnaît le type de composée ($\sqrt{u}$, u^n, u^{-n} ou $x \mapsto u(ax + b)$) et on identifie u.*
2. *On détermine les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction.*
3. *On calcule $u'(x)$ et on applique la formule de dérivation qui convient.*

Exemple

Déterminer les ensembles de définition $\mathcal{D}$ et de dérivabilité $\mathcal{D}'$ de f, puis calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$	2) $f(x) = \left(\frac{3x-1}{2x-4}\right)^2$	3) $f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}$	4) $f(x) = (2x - 3)^5$

Propriété (admise)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.
La fonction $f \circ u$ composée de u suivie de f est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

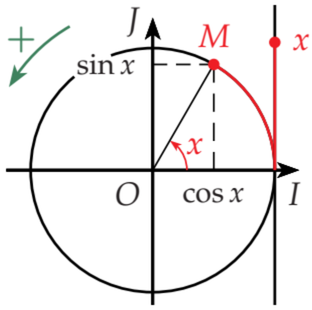
$$(f \circ u)'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \quad \text{ou} \quad \left[f\left(u(x)\right)\right]' = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

III. *Fonctions cosinus et sinus*

1) Définition et rappels

Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé direct. Le point M, image d'un réel x sur le cercle trigonométrique de centre O, a pour coordonnées $(\cos x\,; \sin x)$ où $\cos x$ est le cosinus de x et $\sin x$ est le sinus de x.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$						
$\sin x$						



Propriété – Fonction cosinus et sinus

- La fonction cosinus, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos: x \mapsto \cos x$.
- La fonction sinus, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sin: x \mapsto \sin x$.

2) Propriétés des fonctions cosinus et sinus

Définition - Fonction périodique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et un réel T.
f est périodique de période T ou est T-périodique si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, … … … … … … … … ..

Définition - Fonctions paire et impaire

Soit une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à 0.

- Une fonction f est paire si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, … … … … ….
- Une fonction f est impaire si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, ……………….

Définition - Fonctions paire et impaire

- Les fonctions cos et sin sont … … … … … … …
- La fonction cos est ………. et la fonction sin est …………..

Preuve : …..

Remarque

- Dans un repère, les courbes représentatives de cos et sin « se répètent » tous les 2π.
- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle de sin est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3) Dérivabilité et variations

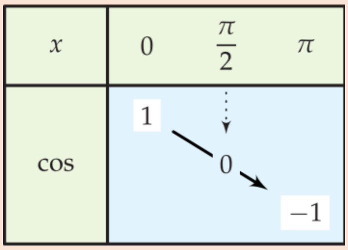
Propriété (admise) - Dérivées des fonctions cos et sin

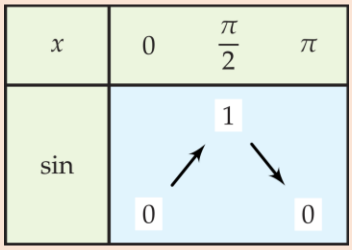
Les fonctions cos et sin sont dérivables et continues sur $\mathbb{R}$.

- $\cos' =$ … … … …
- $\sin' =$ … … … …

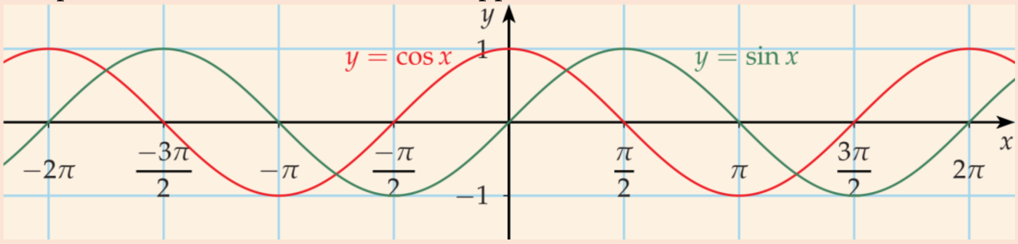
Propriété

- Les variations des fonctions cos et sin sur $[0;\pi]$ sont données par les tableaux ci-contre.





- Les courbes représentatives de cos et sin sont appelées des sinusoïdes.



Preuve : ……

MÉTHODE 2 – Dériver une fonction formée de cos et sin

En général, ce type de fonction définie est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si ce n'est pas le cas, on établira d'abord les ensembles de définition et de dérivabilité (Méthode 1).

Exemple

Calculer $f'(x)$. L'écrire sous une forme facilitant l'étude de son signe.

1) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$	2) $f(x) = \cos^2 x$	3) $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$

Propriété

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \ldots$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \ldots$

Preuve

….

MÉTHODE 3 – Étudier une fonction trigonométrique

Il arrive fréquemment qu'une fonction trigonométrique soit périodique et paire ou impaire. Cela amène alors souvent à étudier d'abord la fonction sur un intervalle restreint avant de l'étudier sur un ensemble plus grand.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3\sin x}{2+\cos x}$.

1. Calculer $f'(x)$. Étudier son signe sur $[0;\pi]$. En déduire les variations de f sur $[0;\pi]$.
2. Calculer $f(-x)$. En déduire les variations de f sur $[-\pi;\pi]$.
3. Montrer que f est 2π-périodique.
4. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f sur $[0;\pi]$ puis sur $[-4\pi;4\pi]$.