Dérivation – Exercices Sésamath

Dérivabilité et dérivation

11 ► MÉTHODE 1

Déterminer l'ensemble de dérivabilité $\mathscr{D}'$ de chaque fonction et calculer sa dérivée sur $\mathscr{D}'$:

1) $f : x \mapsto \sqrt{3x-7}$ **4)** $a : x \mapsto \left(1-2\sqrt{x}\right)^2$

2) $g : x \mapsto (5x^3-3)^2$ **5)** $b : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$

3) $h : x \mapsto \dfrac{1}{(x+6)^3}$ **6)** $c : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{10-x}}$

12 Soit f une fonction définie sur I par $f(x)$.
Justifier que f est dérivable sur I puis calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = \dfrac{5}{3\,(x-2)^4}$ $I =]2\,;\,+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^3}$ $I =]-1\,;\,+\infty[$

3) $f(x) = \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2$ $I =]2\,;\,+\infty[$

4) $f(x) = (x-2)^3 + \dfrac{1}{(2x-1)^3}$ $I = \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

13 ► MÉTHODE 2 p. 91

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = x^2 + \cos x$ **5)** $f(x) = x^2 \cos x$

2) $f(x) = \sin 2x$ **6)** $f(x) = \cos^2 x$

3) $f(x) = \cos x \sin x$ **7)** $f(x) = \sin x + \cos x$

4) $f(x) = \sin^2 x$ **8)** $f(x) = \dfrac{2\cos x + 3}{2\cos x - 3}$

14 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = \left(1-x^2\right)^2$ **4)** $f(x) = \sin^2 x$

2) $f(x) = \left(1-3x^2\right)^3$ **5)** $f(x) = \cos 2x$

3) $f(x) = \left(x^2+x+1\right)^2$ **6)** $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

18 Déterminer les valeurs où la dérivée des fonctions suivantes s'annule.

1) $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + 3}$ définie sur $\mathbb{R}$.

2) $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}$ définie sur $\left]-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\right[$.

3) $h : x \mapsto \dfrac{\cos x + 2}{\sin^2 x + 2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Application de la dérivation

19 Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}.$$

1) Montrer que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que :

$$f'(x) = \frac{x+4\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\,\left(2+\sqrt{x}\right)^2}.$$

2) Résoudre l'équation $X^2+4X-1=0$.
En déduire le signe de $f'(x)$.

3) Dresser le tableau de variation complet de f.

20 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - 2x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1) Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Montrer que $f'(x) = g(x) - 2$.
En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f.

23 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 3x + 3 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + x + 1.$$

Montrer que les courbes représentatives de ces deux fonctions ont une tangente commune en un point.

24 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2\cos x}{2+\cos x}.$$

Étudier les extremums locaux de f sur $[0\,;\,2\pi]$.

25 Soit la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x+3}}.$$

1) Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de f.

2) Montrer que, là où f est dérivable :

$$f'(x) = \frac{(x+1)(3x+11)}{2(x+3)\sqrt{x+3}}.$$

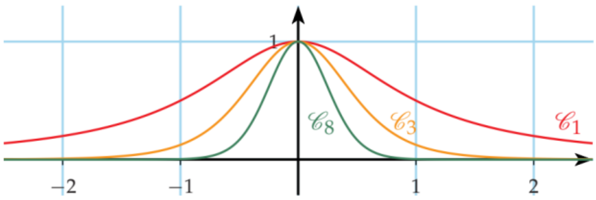
3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que f admet un minimum sur son ensemble de définition.

27 Soit la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Dans un repère orthonormé, on note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n. Ci-dessous, on a tracé $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_8$.



1) On admet que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer $f_n'(x)$.

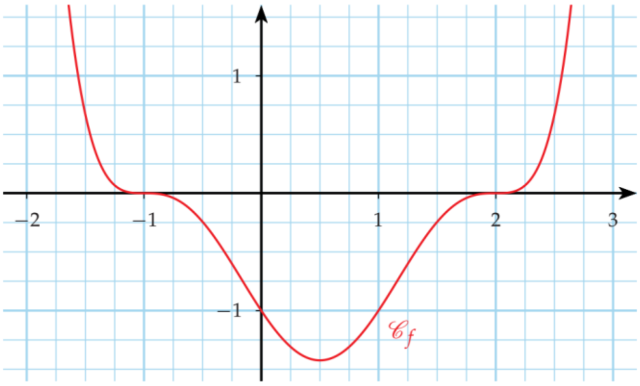
2) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente (d) à la courbe $\mathscr{C}_3$ au point d'abscisse 1.

b) Soit la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{5}{32}x + \dfrac{3}{16}$.
Montrer qu'il existe une courbe $\mathscr{C}_n$ qui admet (Δ) comme tangente au point d'abscisse -1.
Déterminer la valeur de n correspondante.

29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{8}(x^2 - x - 2)^3$$

représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.



1) Conjecturer les variations de f.
2) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
3) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4) Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

• Calculs avec cosinus et sinus

30 Exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$:

1) **a)** $\sin(3\pi + x)$ **c)** $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
b) $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right)$ **d)** $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$

2) **a)** $\sin(\pi - x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$
b) $3\sin(\pi + x) - 2\sin(\pi - x) + 4\sin(x - \pi)$

31 Simplifier les expressions suivantes :
1) $\cos(x - \pi)$ **3)** $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
2) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ **4)** $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

32
1) Étant donné que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, calculer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
2) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

33 Établir pour tous réels x et y les égalités suivantes.
1) $\sin(x + y)\cos(x - y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
2) $1 - \sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$.
3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$.

• Périodicité

38 Vérifier que la fonction f est T-périodique.
1) $f : x \mapsto \sin(6x - 3)$ $T = \dfrac{\pi}{3}$
2) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $T = \pi$
3) $f : x \mapsto \cos^2 x - \sin^2 x$ $T = \pi$
4) $f : x \mapsto \left(4\cos^2 x - 3\right)\cos x$ $T = \dfrac{2\pi}{3}$

• Parité

39 Étudier la parité des fonctions suivantes.
- $f_1 : x \mapsto x^2 + 4$
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 + 1}$
- $f_3 : x \mapsto \dfrac{1 + x^2 + x^4}{x(x^2 + x^4)}$
- $f_4 : x \mapsto \dfrac{2x + 1}{x - 2}$
- $f_5 : x \mapsto \lfloor x \rfloor$
- $f_6 : x \mapsto |x|$
- $f_7 : x \mapsto \cos x + \sin x$
- $f_8 : x \mapsto \cos(x + \pi)$

40 On considère les types de fonctions suivantes :
1) affine $x \mapsto ax + b$
2) polynôme du second degré $x \mapsto ax^2 + bx + c$
3) homographique $x \mapsto \dfrac{ax + b}{cx + d}$
4) polynôme du troisième degré $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$
Pour chaque type, à quelle condition a-t-on :
- une fonction paire ?
- une fonction impaire ?

• Inéquations avec cosinus et sinus

41 Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes :
1) $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{4}$
2) $\sin x = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$
3) $\cos 2x = \cos\dfrac{\pi}{4}$
4) $\cos x = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
5) $2\cos 2x = 1$
6) $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
7) $\cos 2x = \cos x$
8) $\sin 3x = \cos x$

42
1) Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ les équations suivantes :
a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ **d)** $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\cos x = -\sin x$

45 Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ les inéquations suivantes :

1) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 \geqslant 0$
2) $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 < 0$
3) $\cos^2 x - \left(3 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos x + \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \leqslant 0$

46 Résoudre sur $]-\pi\,;\,\pi]$ les inéquations :

1) $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) < \dfrac{1}{2}$. 2) $\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{7}\right) \leqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

• Limites avec cosinus et sinus

48 ROC

1) On rappelle que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\sin' = \cos$.
Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.
2) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque :
a) $u_n = n\sin\dfrac{1}{n}$ **b)** $u_n = n^2\sin\dfrac{1}{n}$ **c)** $u_n = \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n}$

49 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2\cos x}{2x-\pi} \text{ pour } x \neq \frac{\pi}{2}.$$

En étudiant la dérivabilité de la fonction cosinus en $\dfrac{\pi}{2}$, déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$.

51 En opérant le changement de variable $X = x + \dfrac{\pi}{4}$, déterminer $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}$.

52 Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x - 2\sin x}{x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{2}{\pi}} \dfrac{\pi x - 2}{\cos\frac{1}{x}}$

54 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non constante de réels. Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(a_n)$.
Existe-t-il (a_n) telle que (u_n) converge vers $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$?

55

1) Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n = \dfrac{2n^2 + \cos n}{3n^2 + 5}$.
Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.
2) Soit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \dfrac{\cos n - 2n}{\sqrt{n}}$.
Montrer que (v_n) converge et préciser sa limite.

• Étude de fonctions

57 ► MÉTHODE 3 p. 92

Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = 2x + \sin 2x.$$

1) Étudier la parité de f. Interpréter graphiquement.
2) **a)** Démontrer que, pour tout $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$f'(x) = 2(1 + \cos 2x).$$

b) Étudier les variations de f sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
3) À l'aide de 1, dresser le tableau de variation de f.

58 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x - \sin x.$$

1) Calculer $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
2) Calculer $f'(x)$.
3) En déduire les variations de f.

59 Soit les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,2\pi]$ par :

$$f(x) = \cos 2x \cos x \text{ et } g(x) = \sin 2x \sin x.$$

1) Montrer que $f(x) - g(x) = \cos 3x$.
2) Résoudre l'équation $\cos 3x > 0$ sur $[0\,;\,2\pi]$.
3) Étudier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions f et g sur $[0\,;2\,\pi]$.

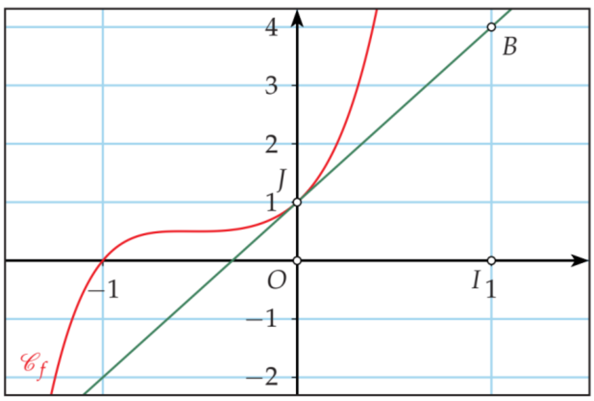
60 Étudier sur $[-\pi\,;\,\pi]$ les variations de la fonction :

$$f : \theta \mapsto \sin(2\theta + \pi/6) - \theta.$$

61 Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = (ax+1)(2x^2 + x + 1)^2.$$

Dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f et la droite qui passe par J et $B(1\,;\,4)$.



1) a) Justifier que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point J.

b) Déterminer le coefficient directeur de (JB).

c) Démontrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \left[10ax^2 + (3a+8)x + a + 2)\right](2x^2 + x + 1).$$

d) On admet que (JB) est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point J.
Déterminer alors la valeur de a.

2) Montrer que $f'(x) = (10x^2 + 11x + 3)(2x^2 + x + 1)$.

3) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

62 Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que f est périodique.

3) Montrer que f n'est ni paire ni impaire.

4) Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right[$.

63 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \text{ et } g(x) = f(x) - \frac{x^4}{24}.$$

1) a) Dériver deux fois f et en déduire que $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x.

b) Dériver quatre fois g et en déduire que $g(x) \leqslant 0$ pour tout réel x.

c) En déduire un encadrement de $\cos x$.

2) a) Déterminer la précision $\varepsilon(x)$ de l'encadrement.

b) Étudier la fonction ε.
En déduire à quelle condition sur x il est pertinent d'utiliser cet encadrement.

3) Application : encadrer $\cos\frac{\pi}{5}$ et estimer sa précision.

65

1) Soit f la fonction définie sur $[-1\,;\,3[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{4(x+1)}{3-x}}$$

représentée par $\mathscr{C}_f$ dans un repère du plan.

a) Montrer que la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation :

$$x - y + 1 = 0.$$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2(3-x)^3$$

représentée par $\mathscr{C}_g$ dans un repère du plan.

a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$g'(x) = \frac{1}{4}x(6-5x)(x-3)^2.$$

b) Déterminer les points de $\mathscr{C}_g$ où ses tangentes sont horizontales.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) Soit la fonction définie par :

$$\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \in [-1\,;\,1[\\ h(x) = g(x) & \text{si } x \in [1\,;\,+\infty[\end{cases}.$$

La fonction h est-elle dérivable en 1 ?