Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, $f(a+h) - f(a) = \cos(a+h) - cosa$

Or nous savons tous que $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

Ainsi $\cos(a+h) - cosa = \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) - \cos(a)$

On alors $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) - \cos(a)}{h}$

$$= \frac{\cos(a) \times (cosh - 1) - \sin(a) \times \sin(h)}{h} = cosa\frac{cosh-1}{h} - sina\frac{sinh}{h}$$

Or on sait que $\lim_{h\to 0} \frac{cosh-1}{h} = 0$ et $\lim_{h\to 0} \frac{sinh}{h} = 1$

Donc $\lim_{h\to 0} cosa\frac{cosh-1}{h} = 0$ et $\lim_{h\to 0} -sina\frac{sinh}{h} = -sina$, par somme, $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -sina$

La fonction $x \mapsto cosx$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $cos'(x) = -\sin(x)$