Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°3 Durée 1h55 mn	19 décembre 2018

Exercice 1 (12 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

L'objectif de cette partie consiste à démontrer que la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$ est non nulle et unique.

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

(a) Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = 0$.

(b) En déduire que pour tout réel x, $g(x) = 1$.

(c) Montrer que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

2. Supposons qu'il existe une autre fonction g telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.

Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

(a) Montrer que pour tout réel x, $h'(x) = 0$.

(b) En déduire que $f = g$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

1. (a) Déterminer la limite de f quand x tend vers 0.

(b) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

(c) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère orthonormé ?

2. (a) Démontrer que, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}(2x + 1)$$

(b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

(c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

Déterminer la valeur approchée de α arrondie au centième.

Exercice 2 *(3 points)*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$.

On sait que pour 2 points distincts A d'affixe z_A et B d'affixe z_B on a $\left(\vec{u}\ ,\overrightarrow{AB}\right) = arg(z_B - z_A\ )\ [2\pi]$.

1) Montrer que pour tout point C d'affixe z_C et D d'affixe z_D on a :

$$\left(\overrightarrow{AB}\ ,\overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$$

2) On donne $z_A = -2 + 2i$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 4i$.

   a) Calculer $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right|$ et arg $\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$.

   b) En déduire que le triangle ABC est isocèle rectangle.

Exercice 3 *(5 points)*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{3} + \mathrm{i} \ \text{ et } \ z_{\mathrm{C}} = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

1. (a) Déterminer, en détaillant vos calculs ou votre raisonnement, les formes exponentielles de $z_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{B}}$ et z_{C} .

(b) En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.

2. (a) Écrire le quotient $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

(b) En déduire la nature du triangle ABC .

3. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

$$|z| = \left|z + \sqrt{3} - i\right|.$$

Question bonus

Démontrer que pour tous nombres réels p et q :

$$e^{ip} + e^{iq} = 2e^{\frac{i(p+q)}{2}} \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

En déduire la formule suivante :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$