Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°3 Durée 1h55 mn	19 décembre 2018

Exercice 1 (12 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

L'objectif de cette partie consiste à démontrer que la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$ est non nulle et unique.

1. Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

(a) Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = 0$.

Pour tout réel x, on a : $h'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$.

(b) En déduire que pour tout réel x, $g(x) = 1$.

La fonction h est donc constante et égale à $g(0) = f(0)f(0) = 1$.

(c) Montrer que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)f(-x) = 1$ ce qui montre que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2. Supposons qu'il existe une autre fonction g telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.

Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

(a) Montrer que pour tout réel x, $h'(x) = 0$.

Pour tout réel x, on a : $h'(x) = \frac{f\prime(x)g(x) - f(x)g\prime(x)}{g^2(x)} = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g^2(x)} = 0$.

(b) En déduire que $f = g$.

Donc la fonction k est constante et égale à $k(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ donc $f = g$ d'où l'unicité.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

1. (a) Déterminer la limite de f quand x tend vers 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

(b) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc, par produit, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(c) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère orthonormé ?

C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) lorsque x tend vers $+\infty$ ainsi qu'une asymptote verticale d'équation $x = 0$ (axe des ordonnées) en $+\infty$.

2. (a) Démontrer que, f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ donc, par composée, la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. Il en est de même par produit de $\frac{1}{x^2}$ par $e^{\frac{1}{x}}$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} \times e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times e^{\frac{1}{x}} = \left(-\frac{2x}{x^4} - \frac{1}{x^4}\right) \times e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$$

(b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

$x^4 > 0$ et $e^{\frac{1}{x}} > 0$ donc f' a le même signe que $-(2x+1)$ d'où le tableau de variation suivant :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

(c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

Déterminer la valeur approchée de α arrondie au centième.

La fonction f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et $2 \in f(]0;+\infty[)$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $x = 1{,}11$ à 10^{-2} près.

Exercice 2 (3 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$.

On sait que pour 2 points distincts A d'affixe z_A et B d'affixe z_B on a $(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A\,)\ [2\pi]$.

1) Montrer que pour tout point C d'affixe z_C et D d'affixe z_D on a :

$$(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$$

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}) &= (\overrightarrow{AB}\,,\vec{u}) + (\vec{u}\,,\overrightarrow{CD}) \\ &= -(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}) + (\vec{u}\,,\overrightarrow{CD}) = (\vec{u}\,,\overrightarrow{CD}) - (\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}) \\ &= arg(z_D - z_C\,) - arg(z_B - z_A\,) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]\end{aligned}$$

2) On donne $z_A = -2 + 2i$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 4i$.

a) Calculer $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right|$ et $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$.

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{(2+2i) - 4i}{(-2+2i) - 4i} = \frac{2-2i}{-2-2i} = \frac{2-2i}{-2-2i} = i \quad donc \quad \left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = |i| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ \ mod\ 2\pi$$

b) En déduire que le triangle ABC est isocèle rectangle.

Le triangle est rectangle en C car $(\overrightarrow{CA}\,,\overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$.

De plus, $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1 \Leftrightarrow\ |z_B - z_C| = |z_A - z_C|\ \Leftrightarrow CB = CA$; il est aussi isocèle.

Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = -\sqrt{3} + \mathrm{i}\ \text{ et }\ z_{\mathrm{C}} = \sqrt{3} + \mathrm{i}.$$

1. (a) Déterminer, en détaillant vos calculs ou votre raisonnement, les formes exponentielles de $z_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{B}}$ et z_{C} .

$$z_A = 2 \times (-i) = 2e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$z_B = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{\frac{i5\pi}{6}}$$

$$z_C = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{\frac{i\pi}{6}}$$

(b) En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.

On remarque que $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2$ ce qui signifie que les trois points appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

2. (a) Écrire le quotient $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} = \frac{(-\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)}{3 + 9} = \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

(b) En déduire la nature du triangle ABC .

$$\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1 \iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \iff AB = AC$$

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$$

Ces deux conditions permettent d'en déduire que le triangle ABC est équilatéral.

3. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

$$|z| = |z + \sqrt{3} - i|.$$

On a $|z| = OM$ et $|z - (\sqrt{3} + i)| = CM$ donc $|z| = |z + \sqrt{3} - i| \iff OM = CM$

Le point M décrit la médiatrice de $[OC]$: l'ensemble (E) est donc la médiatrice de $[OC]$.

Question bonus

Démontrer que pour tous nombres réels p et q :

$$e^{ip} + e^{iq} = 2e^{\frac{i(p+q)}{2}} \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) = \mathcal{R}e\left(e^{\frac{i(p-q)}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i(p-q)}{2}} + e^{-\frac{i(p-q)}{2}}\right)$$

$$\begin{aligned} 2e^{\frac{i(p+q)}{2}} \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) &= 2e^{\frac{i(p+q)}{2}} \times \frac{1}{2}\left(e^{\frac{i(p-q)}{2}} + e^{-\frac{i(p-q)}{2}}\right) \\ &= \left(e^{\frac{i(p-q)}{2}} \times e^{\frac{i(p+q)}{2}} + e^{-\frac{i(p-q)}{2}} \times e^{\frac{i(p+q)}{2}}\right) \\ &= \left(e^{\frac{i2p}{2}} + e^{\frac{i2q}{2}}\right) = e^{ip} + e^{iq} \end{aligned}$$

En déduire la formule suivante :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= \mathcal{R}e\left(e^{ip} + e^{iq}\right) \\ &= \mathcal{R}e\left(2e^{\frac{i(p+q)}{2}} \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathcal{R}e\left(2e^{\frac{i(p+q)}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \end{aligned}$$