Exercice 1

On considère une fonction f définie et dérivable sur chacun des intervalles $\left]-\infty\,;-2\right[$ et $\left]-2\,;+\infty\right[$.
La fonction f admet le tableau de varition ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		1		α		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

où α est le nombre réel strictement supérieur à 1 tel que $f(\alpha)=0$.

On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

Dire pour chacune des cinq affirmations suivantes si elle est "*vraie*" ou si elle est "*fausse*" ou si "*on ne peut pas conclure*". Aucune justification n'est demandée.

Le barème est le suivant :

- 0,5 point par réponse exacte ;
- 0,25 point par réponse fausse ;
- 0 point pour absence de réponse.

Il n'y aura pas de note globale négative.

1. L'équation $f(x)=1$ admet exactement deux solutions.
2. $f(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in\left]-5\,;-2\right[$.
3. Si $-2<x<1$ et $x<x'$ alors $f(x)<f(x')$.
4. $f'(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in\left]-\infty\,;-2\right[$.

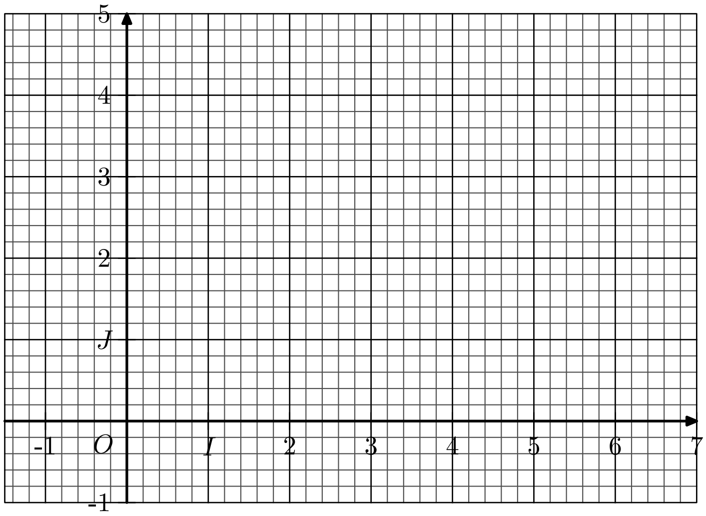
Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-1\,;+\infty\right[$ par la relation :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Etudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   b. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes? si oui, préciser.
2. On note (d) la droite d'équation $y=1$. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (d).
3. a. Etablir l'égalité suivante :
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{2h}{2\cdot(h+2)\cdot\left[2\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2}\cdot(h+2)\right]}$$
   b. En déduire la valeur du nombre dérivé $f'(1)$.
4. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$.



Exercice 3

1. Soit n un entier naturel non-nul quelconque. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :
$$f(x)=\left(1+x\right)^n-1-n\cdot x$$
Etablir le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Etablir l'inégalité ci-dessous pour tout nombre x positif et tout entier naturel n strictement positif :
$$\left(1+x\right)^n\geqslant 1+n\cdot x$$

L'inégalité établie à la dernière question s'appelle : ***Inégalité de Bernoulli***

Exercice 4

Le nombre d'atomes d'une source radioactive a tendance à diminuer dans le temps. On note $N(t)$ le nombre de noyau à l'instant t. En observant ce phénomène sur variation de temps, $\Delta\,t$, on se rend compte que le nombre d'atomes a connu une variation de $\Delta\,N(t)$ et on a réussi à établir la formule suivante :

$$\frac{\Delta\,N(t)}{N(t)}=-\lambda\cdot\Delta\,t$$

où λ est une constante dépendant uniquement de la nature des noyaux observées.

1. a. La durée de demi-vie du Radon-220 est de $56\,s$. Déterminer une valeur approchée de la constante λ dans le cas du Radon-220.
   b. On part d'un échantillon contenant $240\,g$ contenant environ $6{,}02\times10^{23}$ noyaux de radon.
   Déterminer le temps à attendre pour que la quantité observée pèse :
   $120\,g$; $60\,g$
2. a. Etablir l'égalité suivante : $\dfrac{\Delta\,N(t)}{\Delta\,t}=-\lambda\cdot N(t)$
   b. En supposant que la fonction N, dépendant du temps t, est dérivable, établir la formule suivante :
   $N'(t)=-\lambda\cdot N(t)$

Exercice 5

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x)=\frac{4\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+7}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Vérifier que pour tout réel x : $f(x)=\dfrac{4}{1+7e^{-x}}$

2. a. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet deux asymptôtes dont on précisera les équations.

   b. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   c. Démontrer que pour tout réel x : $0<f(x)<4$.

Exercice 6

Etant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-k\cdot x}}$$

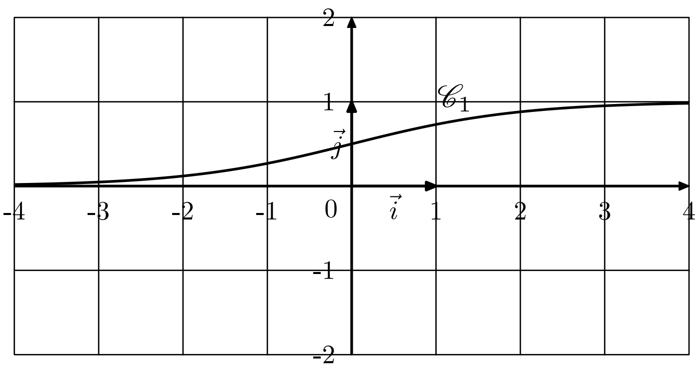
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

Partie A

Dans cette partie, on choisit $k=1$. On a , pour tout réel x :

$$f_1(x)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ est donnée ci-dessous :



1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Démontrer que, pour tout réel x : $f_1(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.

3. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
   En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k=-1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.

On note K milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x : $f_1(x)+f_{-1}(x)=1$.

2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ sur le repère ci-dessous.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0=2 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. a. Etablir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot u_n}$$

   b. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n\geqslant\sqrt{2}$

2. a. Déduire des questions précédentes l'encadrement :
   $0\leqslant u_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2$

   b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'encadrement ci-dessous pour tout entier naturel n :
   $0\leqslant u_n-\sqrt{2}\leqslant\left(u_0-\sqrt{2}\right)^{(2^n)}$

3. a. Donner une valeur approchée de $\left|u_0-\sqrt{2}\right|$ au millimème près.

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 8

On considère le plan muni du repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ et les trois points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A=1-2\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_B=-3-4\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad z_C=-2\sqrt{3}-\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$$

1. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z défini par le quotient :

$$Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$$

   b. En déduire l'écriture trigonométrique du nombre complexe Z.

2. a. Déduire des questions précédentes que le triangle ABC est un triangle isocèle en A.

   b. Donner la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 9

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$z_0=\sqrt{3}-\mathrm{i} \quad ; \quad z_{n+1}=(1+\mathrm{i})\cdot z_n \quad \text{pourt tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et $1+\mathrm{i}$.
   En déduire la forme exponentielle de z_1.

3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Exercice 10

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0=1 \quad ; \quad z_{n+1}=\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\right)\cdot z_n$$

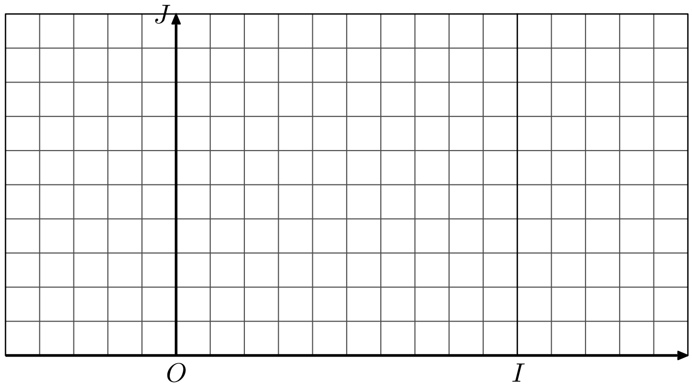
1. Déterminer les affixes des poitns A_1 et A_2.

2. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

3. On admet que, pour tout entier naturel n :

$$z_n=|z_n|\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{n\cdot\pi}{6}}$$

   Placer les point A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 dans le repère ci-dessous :



Exercice 11

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$. Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cdot\cos(4x)$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ en fin d'exercice. Ce graphique sera complété au fur et à mesure de l'exericce.

On considère également la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
   $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = f\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

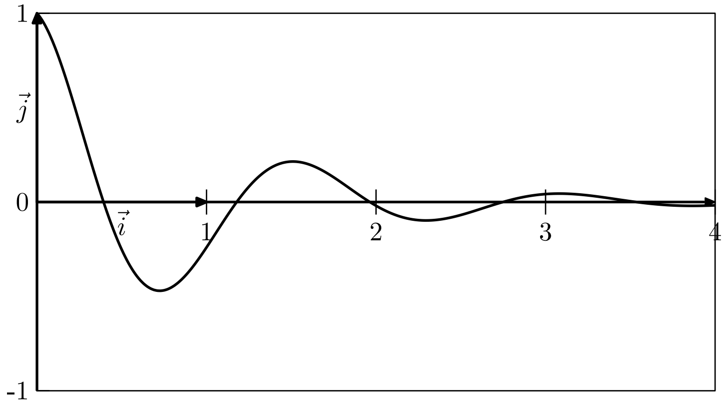
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
   $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cdot\left[\cos(4x) + 4\cdot\sin(4x)\right]$

   b. En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
   Compléter le graphique donné en y traçant $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.

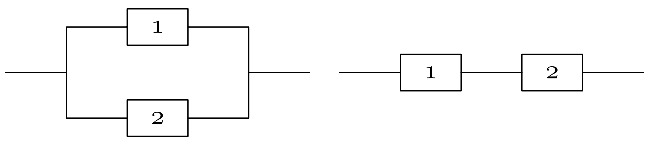


Exercice 12

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement "*le composant* 1 *est défaillant avant un an*" et on note D_2 l'évènement "*le composant* 2 *est défaillant avant un an*".

On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que : $\mathcal{P}(D_1)=\mathcal{P}(D_2)=0{,}39$

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés "*en parallèle*", le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

2. Lorsque les deux composants sont montés "*en série*", le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.