Correction 1

1. **Faux :**
Respectivement, les intervalles :
$]-\infty\,;-2[\quad;\quad]-2\,;1[\quad;\quad]\alpha\,;+\infty[$
ont pour images les intervalles
$]-\infty\,;+\infty[\quad;\quad]-1\,;+\infty[\quad;\quad]0\,;+\infty[$.

On remarque que la valeur 1 appartient aux trois intervalles images : on peut conjecturer que la fonction f admet au moins 3 antécédents du nombre 1.

2. **On ne peut pas conclure :**
La donnée d'un tableau n'est pas suffisamment précis pour savoir à partir de quelle valeur β, la fonction devient négative ; rien ne nous indique qu'à partir de -5 *(ou avant)* la fonction f devient négative ou nulle.

3. **Faux :**
- Prouvons l'existence de $a\in]-2\,;1]$ tel que $f(a)=2$.
On a les limites aux bornes de $]-2\,;1[$:
$\lim_{x\mapsto -2^+} f(x)=+\infty\quad;\quad f(1)=-1$
De plus :
  - la fonction f est continue sur $]-2\,;1]$
  - la fonction f est strictement décroissante sur $]-2\,;1]$
  - le nombre 2 est compris entre les limites aux bornes de l'intervalle $]-2\,;1]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on l'existence d'un réel a tel que :
$f(a)=2$
- On a : $\;f(\alpha)=0$

On a : $\;-2<a<1\quad;\quad a<\alpha\quad;\quad f(a)>f(\alpha)$

4. **Vrai :**
D'après le tableau de variation, la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-2[$; on en déduit que pour tout nombre x appartenant à $]-\infty\,;-2[$, le nombre dérivée de f est négatif :
$x\in]-\infty\,;-2[\quad\Longrightarrow\quad f'(x)\leqslant 0.$

Correction 2

1. a.
- On a les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto -1}\sqrt{x^2+1}=\sqrt{2}\quad;\quad\lim_{x\mapsto -1^+} x+1=0^+$
On en déduit la valeur de la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 1^+} f(x)=\lim_{x\mapsto 1^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=+\infty$$
- Pour $x\neq 0$, on a la transfomation suivante :
$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\sqrt{x^2\Big(1+\dfrac{1}{x^2}\Big)}}{x+1}=\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x\cdot\big(1+1\big)}$$
Pour $x>0$, on a :
$$=\frac{x\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x\cdot\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)}=\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}$$
On a les deux limites suivantes :
$\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=1\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}1+\dfrac{1}{x}=1$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$$

b. Grâce aux des limites précédentes, on en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes sur $]-1\,;+\infty[$:
- $\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=1$
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y=1$ comme asymtôte horizontale en $+\infty$.
- $\lim_{x\mapsto 1^+}f(x)=+\infty$

2. Pour étudier la position relative de la droite (d) avec la droite d'équation $y=1$, nous allons étudier le signe de la différence suivante :
$$f(x)-1=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}-1=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}{x+1}$$
Le facteur $\sqrt{x^2+1}+(x+1)$ est non-nul :
$$=\frac{\big[\sqrt{x^2+1}-(x+1)\big]\cdot\big[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\big]}{(x+1)\cdot\big[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\big]}$$
$$=\frac{\big(\sqrt{x^2+1}\big)^2-(x+1)^2}{(x+1)\cdot\big[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\big]}$$
$$=\frac{x^2+1-\big(x^2+2x+1\big)}{(x+1)\cdot\big[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\big]}$$
$$=\frac{-2x}{(x+1)\cdot\big[\sqrt{x^2+1}+(x+1)\big]}$$
En observant facilement que le dénominateur est positif sur $]-1\,;+\infty[$, ainsi le signe de ce quotient ne dépend que du numérateur ; on en déduit :
- La courbe $\mathscr{C}_f$ se situe au dessus de la droite (d) sur l'intervalle $]-1\,;1[$.
- La courbe $\mathscr{C}_f$ se situe en dessous de la droite (d) sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. a. On a les transformations algébriques :
$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{\dfrac{\sqrt{(1+h)^2+1}}{(1+h)+1}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{h}$$
$$=\frac{\dfrac{\sqrt{h^2+2h+2}}{h+2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{h}=\frac{\dfrac{2\sqrt{h^2+2h+2}-\sqrt{2}\cdot(h+2)}{2\cdot(h+2)}}{h}$$
L'expression conjuguée est non-nulle pour tout x :
$$=\frac{\Big[2\sqrt{h^2+2h+2}-\sqrt{2}(h+2)\Big]\cdot\Big[2\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2}\cdot(h+2)\Big]}{2\cdot(h+2)\cdot\Big[2\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2}\cdot(h+2)\Big]\cdot h}$$
$$=\frac{4\big(h^2+2h+2\big)-2(h+2)^2}{2\cdot(h+2)\cdot\Big[2\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2}\cdot(h+2)\Big]\cdot h}$$
$$=\frac{\big(4h^2+8h+8\big)-\big(2h^2+8h+4\big)}{2\cdot(h+2)\cdot\Big[2\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2}\cdot(h+2)\Big]\cdot h}$$
$$=\frac{2h^2}{2\cdot(h+2)\cdot\Big[2\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2}\cdot(h+2)\Big]\cdot h}$$
$$=\frac{2h}{2\cdot(h+2)\cdot\Big[2\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2}\cdot(h+2)\Big]}$$

b. On en déduit la limite suivante :

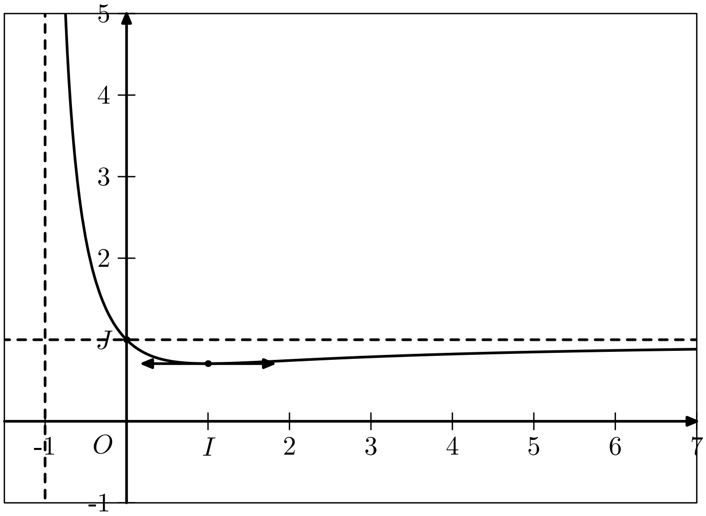
$$\lim_{h\mapsto 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\mapsto 0}\frac{2h}{(h+2)\cdot\left[2\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2}\cdot(h+2)\right]}=0$$

On en déduit que la fonction f admet pour nombre dérivée en 1 :

$$f'(1)=0$$

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymtôte horizontale en 1.

4. En utilisant les différentes propriétés géométriques de la courbe $\mathscr{C}_f$, on obtient le tracé suivant :



Correction 3

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$$f(x)=\left[u(x)\right]^n-1-n\cdot x$$
où la fonction u est définie par :
$$u(x)=1+x \quad ; \quad u'(x)=1$$

La formule de dérivation de la puissance n[ième] d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
$$f'(x)=n\cdot u'(x)\cdot\left[u(x)\right]^{n-1}=n\times 1\cdot\left(1+x\right)^{n-1}-0-n$$
$$=n\left(1+x\right)^{n-1}-n=n\cdot\left[\left(1+x\right)^{n-1}-1\right]$$

Etudions le signe de la fonction f' dérivée de la fonction f. On a les comparaisons suivantes :
$$x\geqslant 0$$
$$1+x\geqslant 1$$
Comme $n>0 \implies n-1\geqslant 0$:
$$(1+x)^{n-1}\geqslant 1^{n-1}$$
$$(1+x)^{n-1}\geqslant 1$$
$$(1+x)^{n-1}-1\geqslant 0$$
$$n\cdot\left[(1+x)^{n-1}-1\right]\geqslant n\times 0$$
$$f'(x)\geqslant 0$$

La fonction f' étant positive sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. En remarquant :
$$f(0)=(1+0)^n-1-0\times x=1^n-1-0=1-1=0$$
On obtient le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$:

x	0	$+\infty$
Variation de f	0 ↗	

On en déduit que la fonction f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre x appartenant à $\mathbb{R}_+$, on a la comparaison :
$$f(x)\geqslant 0$$
$$\left(1+x\right)^n-1-n\cdot x\geqslant 0$$
$$\left(1+x\right)^n\geqslant 1+n\cdot x$$

Correction 4

1. a. Dire que la durée de demi-vie du Radon-220 est de $56\,s$ signifie qu'à partir d'un instant, il faut attendre $56\,s$ pour que la quantité de matière observée a été réduite de moitié ; ainsi, sur cette durée :
$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)} \text{ représente un quotient de } \frac{1}{2}$$
Ainsi, on a l'égalité :
$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)}=-\lambda\cdot\Delta t$$
$$\frac{1}{2}=-\lambda\cdot 56$$
$$\frac{1}{2\times 56}=-\lambda$$
$$\lambda=-\frac{1}{112}\approx -0{,}0089$$

b. En remarquant que : $\dfrac{238}{2}=119 \quad ; \quad \dfrac{119}{2}\approx 59$

On en déduit :

- Il faut attendre 56 secondes pour que le composant passe de $238\,g$ à $119\,g$;
- Il faut également attendre 56 secondes pour que le composant passe de $119\,g$ à environ $59\,g$.

2. a. Partons de la formule initiale :
$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)}=-\lambda\cdot\Delta t$$
$$\Delta N(t)=-\lambda\cdot\Delta t\cdot N(t)$$
$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}=-\lambda\cdot N(t)$$

b. Si l'observation s'effectue entre deux moments t_0 et t_1, la formule obtenue à la question précédente devient :
$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}=\frac{N(t_1)-N(t_0)}{t_1-t_0}=-\lambda\cdot N(t)$$
Lorsque le temps d'étude devient très court *(excessivement court)*, alors t_1 temps vers t_0 et la formule devient :
$$\lim_{t_1\mapsto t_0}\frac{N(t_1)-N(t_0)}{t_1-t_0}=-\lambda\cdot N(t_0)$$
$$N'(t_0)=-\lambda\cdot N(t_0)$$

Correction 5

1. On a la transformation suivante :

$$f(x) = \frac{4\cdot e^x}{e^x+7} = \frac{4\cdot e^x\cdot e^{-x}}{\left(e^x+7\right)\cdot e^{-x}} = \frac{4\cdot e^{x+(-x)}}{e^{x+(-x)}+7e^{-x}}$$
$$= \frac{4\cdot e^0}{e^0+7e^{-x}} = \frac{4}{1+7e^{-x}}$$

2. (a.) • On a la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} 1+7e^{-x} = 1+7\times0 = 1$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{4}{1+7e^{-x}} = 4$$
On en déduit que la fonction f admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y=4$.

• On a la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} 1+7e^{-x} = +\infty$$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{4}{1+7e^{-x}} = 0$$
On en déduit que la fonction f admet, en $-\infty$, une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

(b.) La fonction f est définie par le quotient des deux fonctions u et v définies par :
$$u(x) = 4e^x \quad ; \quad v(x) = e^x+7$$
qui admette pour dérivées :
$$u'(x) = 4e^x \quad ; \quad v'(x) = e^x$$
La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2} = \frac{4e^x\cdot\left(e^x+7\right) - 4e^x\cdot e^x}{\left(e^x+7\right)^2}$$
$$= \frac{4\cdot e^{2x}+28\cdot e^x-4e^{2x}}{\left(e^x+7\right)^2} = \frac{28\cdot e^x}{\left(e^x+7\right)^2}$$
On remarque facilement que la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$; on en déduit que la fonction f est strictement croissante.

(c.) Les deux questions précédentes permettent de dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de f	0 ↗	4

Le tableau de variations permet de démontrer que pour tout réel x, on a :
$$0 < f(x) < 4.$$

Correction 6

Partie A

1. • De la limite $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x = +\infty$, on en déduit :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} 1+e^{-x} = +\infty$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\mapsto-\infty} f_1(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 0$$
• De la limite $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^x = 0$, on en déduit :
$$\lim_{x\mapsto+\infty} 1+e^{-x} = 1$$
$$\Longrightarrow \lim_{x\mapsto+\infty} f_1(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1} = 1$$
On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet la droite d'équation $y=0$ pour asymptote en $-\infty$ et la droite d'équation $y=1$ pour asymptote en $+\infty$.

2. On a les transformations algébriques suivantes :
$$f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1\cdot e^x}{\left(1+e^{-x}\right)\cdot e^x} = \frac{e^x}{1\cdot e^x+e^{-x}\cdot e^x}$$
$$= \frac{e^x}{e^x+e^{-x+x}} = \frac{e^x}{e^x+e^0} = \frac{e^x}{e^x+1}$$

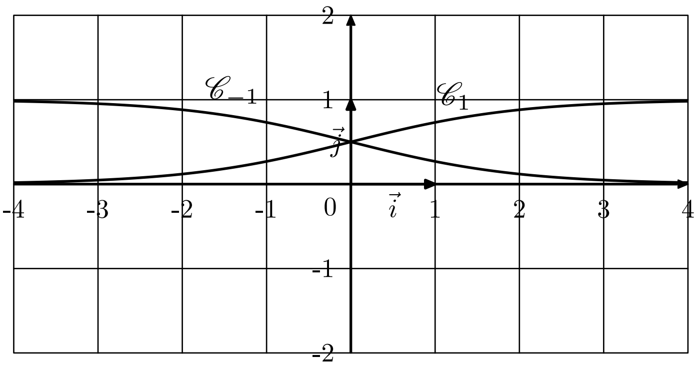
3. Dans sa définition, l'expression de la fonction est donnée sous la forme de l'inverse de la fonction u où :
$$u(x) = 1+e^{-x} \quad ; \quad u'(x) = -e^{-x}$$
La formule de dérivation de l'inverse d'une fonction donne l'expression de la fonction f_1' :
$$f_1'(x) = -\frac{u'(x)}{\left[u(x)\right]^2} = -\frac{-e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$$
Le dénominateur de la fonction f_1' est la somme de deux nombres strictement positif : il est positif. Le numérateur du quotient définissant f_1' est strictement positif. On en déduit que la fonction f_1' est strictement positif sur $\mathbb{R}$: la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Simplifions l'expression de la somme :
$$f_1(x) + f_{-1}(x) = \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + \left(\frac{1}{1+e^{-(-x)}}\right)$$
$$= \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x+1}{1+e^x} = 1$$

2. Pour x un nombre réel, on a les coordonnées suivantes :
$$P\big(x\,;f_1(x)\big) \quad ; \quad M\big(x\,;f_{-1}(x)\big)$$
Ainsi, le point K milieu du segment $[MP]$ a pour coordonnées :
$$K\left(\frac{x+x}{2}\,;\frac{f_1(x)+f_{-1}(x)}{2}\right) = \left(x\,;\frac{1}{2}\right)$$
On vient de montrer que le point K appartient à la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$.

3. La relation précédente montrer que la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{-1}$.



Correction 7

1. (a.) On a les transformations algébriques suivantes :
$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - \sqrt{2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u_n^2+2}{u_n} - \sqrt{2} = \frac{u_n^2+2}{2\cdot u_n} - \sqrt{2}$$
$$= \frac{u_n^2+2}{2\cdot u_n} - \frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot u_n}{2\cdot u_n} = \frac{u_n^2+2-2\cdot\sqrt{2}\cdot u_n}{2\cdot u_n}$$
$$= \frac{u_n^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot u_n + \left(\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot u_n} = \frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2\cdot u_n}$$

b. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$\mathcal{P}_n$: "$u_n \geqslant \sqrt{2}$".

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrons que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**

  On a : $u_0 = 2 \geqslant \sqrt{2}$

  Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :

  $u_n \geqslant \sqrt{2}$

  D'après la question précédente, on a l'égalité :

  $$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2 \cdot u_n}$$

  Le membre de droite est positif car il est défini par un quotient dont le numérateur est positif et le dénominateur est, à l'aide de l'hypothèse de récurrence supérieur ou égal à $\sqrt{2}$:

  $$u_{n+1} - \sqrt{2} \geqslant 0$$
  $$u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$$

  Ainsi, On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité, on en déduit que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

2. a. On a les deux encadrements suivants :

- La question précédente permet d'écrire la comparaison :

  $$u_n \geqslant \sqrt{2}$$
  $$2 \cdot u_n \geqslant 2 \cdot \sqrt{2}$$

  La fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$:

  $$\frac{1}{2 \cdot u_n} \leqslant \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

  On en déduit :

  $$\frac{1}{2 \cdot u_n} \leqslant 1$$
  $$\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2 \cdot u_n} \leqslant (u_n - \sqrt{2})^2$$

  A l'aide de la question 1. a. :

  $$u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant (u_n - \sqrt{2})^2$$

- La question précédente, au rang $(n+1)$ permet d'écrire :

  $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{2}$

On vient d'établir l'encadrement suivante :

$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant (u_n - \sqrt{2})^2$

b. Considérons la propriété $\mathcal{Q}_n$ définie pour tout entier naturel par la relation :

$\mathcal{Q}_n$: "$0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant (u_0 - \sqrt{2})^{(2^n)}$"

Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout entier naturel n :

- **Initialisation :**

  On a :

  - $u_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}59$
  - $(u_0 - \sqrt{2})^{(2^0)} = u_0 - \sqrt{2}$

  On en déduit l'encadrement :

  $0 \leqslant u_0 - \sqrt{2} \leqslant (u_0 - \sqrt{2})^{(2^0)}$

  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété $\mathcal{Q}_n$ soit vérifiée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :

  $0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant (u_0 - \sqrt{2})^{(2^n)}$

  On a déjà établi l'encadrement :

  $0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant (u_n - \sqrt{2})^2$

  En utilisant la relation vraie au rang n, on a :

  $$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \left[(u_0 - \sqrt{2})^{(2^n)}\right]^2$$
  $$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant (u_0 - \sqrt{2})^{(2 \times 2^n)}$$
  $$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant (u_0 - \sqrt{2})^{(2^{n+1})}$$

  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{Q}_n$ s'initialise au rang 0 et elle vérifie la propriété par récurrence. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n.

3. a. On a la valeur arrondie suivante au millième près :

$|u_0 - \sqrt{2}| \approx 0{,}586$

b. La suite (2^n) est une suite géométrique de premier terme 1 et dont la raison est strictement supérieur à 1. On en déduit la limite :

$\lim_{n \mapsto +\infty} 2^n = +\infty$

Or, on a $|u_0 - \sqrt{2}| < 1$: ainsi, on a la limite :

$\lim_{n \mapsto +\infty} (u_0 - \sqrt{2})^{(2^n)} = 0$

De l'encadrement $0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant (u_0 - \sqrt{2})^{2n}$ et du théorème des gendarmes, on en déduit :

$\lim_{n \mapsto +\infty} u_n - \sqrt{2} = 0$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$:

$\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = \sqrt{2}$

Correction 8

1. a. On a :

$$Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(-2\sqrt{3} - \mathrm{i}\cdot\sqrt{3}) - (1 - 2\cdot\mathrm{i})}{(-3 - 4\cdot\mathrm{i}) - (1 - 2\cdot\mathrm{i})}$$

$$= \frac{-2\sqrt{3} - \mathrm{i}\cdot\sqrt{3} - 1 + 2\cdot\mathrm{i}}{-3 - 4\cdot\mathrm{i} - 1 + 2\cdot\mathrm{i}} = \frac{(-2\sqrt{3} - 1) + \mathrm{i}\cdot(2 - \sqrt{3})}{-4 - 2\cdot\mathrm{i}}$$

$$= \frac{\big[(-2\sqrt{3} - 1) + \mathrm{i}\cdot(2 - \sqrt{3})\big](-4 + 2\cdot\mathrm{i})}{(-4 - 2\cdot\mathrm{i})(-4 + 2\cdot\mathrm{i})}$$

$$= \frac{(-2\sqrt{3}-1)\cdot(-4)+(-2\sqrt{3}-1)\cdot 2\cdot\mathrm{i} + \mathrm{i}\cdot(2-\sqrt{3})\cdot(-4)+\mathrm{i}\cdot(2-\sqrt{3})\cdot 2\cdot\mathrm{i}}{(-4)^2 + 2^2}$$

$$= \frac{\big[8\sqrt{3} + 4 + \mathrm{i}^2\cdot(4 - 2\sqrt{3})\big] + \mathrm{i}\cdot(-4\sqrt{3} - 2 - 8 + 4\sqrt{3})}{16 + 4}$$

$$= \frac{(8\sqrt{3} + 4 - 4 + 2\sqrt{3}) + \mathrm{i}\cdot(-10)}{20}$$

$$= \frac{10\sqrt{3} - 10\cdot\mathrm{i}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\mathrm{i}$$

b. En reconnaissant directement un nombre complexe associé à un angle remarquable, on peut écrire :

$$Z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\mathrm{i} = 1\cdot\Big[\cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) + \mathrm{i}\cdot\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\Big]$$

2. a. De l'écriture trigonométrique du nombre Z, on remarque que son module est égal à 1. Ainsi, on a :

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \implies \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = 1 \implies \frac{AC}{AB} = 1$$

$$\implies AC = AB$$

Ainsi, le triangle ABC est un triangle isocèle en A.

b. De l'écriture trigonométrique du nombre Z, on remarque que sont argument vaut $-\frac{\pi}{6}$. Ainsi, on a :

$$\arg Z = -\frac{\pi}{6} \implies \arg\Big(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\Big) = -\frac{\pi}{6}$$

Puisqu'on a : $z_A \neq z_C$ et $z_A \neq z_B$:

$$\implies \big(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\big) = -\frac{\pi}{6}$$

On en déduit : $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$

Correction 9

1. On a la relation :

$$z_1 = (1 + \mathrm{i})\cdot(\sqrt{3} - \mathrm{i}) = \sqrt{3} - \mathrm{i} + \mathrm{i}\cdot\sqrt{3} - \mathrm{i}^2$$

$$= (1 + \sqrt{3}) + \mathrm{i}\cdot(-1 + \sqrt{3})$$

2. Déterminons l'écriture complexe des deux nombres suivants :

- $$|z_0| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$$
  $$= \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$
  Le nombre z_0 étant non-nul, il admet une écriture exponentielle obtenue en factorisant par le module :
  $$z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\cdot\Big[\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big]$$
  $$= 2\cdot\Big[\cos\Big(-\frac{\pi}{6}\Big) + \mathrm{i}\cdot\sin\Big(-\frac{\pi}{6}\Big)\Big] = 2\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6}}$$
- $$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
  Ce nombre complexe étant non-nul, il admet une écriture exponentielle obtenue en factorisant par le module :
  $$1 + i = \sqrt{2}\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \sqrt{2}\cdot\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$$
  $$= \sqrt{2}\cdot\Big(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4}\Big) = \sqrt{2}\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4}}$$

Ainsi, z_1 admet l'expression algébrique suivante :

$$z_1 = (1 + \mathrm{i})\cdot z_0 = 2\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6}} \cdot \sqrt{2}\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= 2\sqrt{2}\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{12}}$$

3. Des questions précédentes, on en déduit l'égalité :

$$(1 + \sqrt{3}) + \mathrm{i}\cdot(-1 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \mathrm{i}\cdot\frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + \mathrm{i}\cdot\frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \cos\frac{\pi}{12} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$$

En identifiant les parties réelles de cette égalité, on en déduit :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Correction 10

1. Par le calcul, on a :

- $$z_1 = \Big(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\Big)\cdot z_0 = \Big(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\Big)\cdot 1 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}$$
  Le point A_1 a pour affixe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}$.
- $$z_2 = \Big(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\Big)\cdot z_1 = \Big(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\Big)\cdot\Big(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\Big)$$
  $$= \Big(\frac{3}{4}\Big)^2 + 2\cdot\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i} + \Big(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\Big)^2 = \frac{9}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\mathrm{i} - \frac{3}{16}$$
  $$= \frac{6}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\mathrm{i} = \frac{3}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\mathrm{i}$$

2. Pour étudier le quotient $\frac{z_n - z_{n+1}}{0 - z_{n+1}}$, nous devons être sûr que le dénominateur est non-nul. On montre facilement cela par un raisonnement par récurrence.

Etudions le quotient suivant :

$$\frac{z_n - z_{n+1}}{0 - z_{n+1}} = \frac{z_n - \Big(\frac{3}{4} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\Big)\cdot z_n}{0 - z_{n+1}} = \frac{z_n\cdot\Big[1 - \Big(\frac{3}{4} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\Big)\Big]}{-\Big(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot i\Big)\cdot z_n}$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}}{-\frac{3}{4} - \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\Big(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\Big)\Big(-\frac{3}{4} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\Big)}{\Big(-\frac{3}{4} - \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\Big)\Big(-\frac{3}{4} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\Big)}$$

$$= \frac{-\frac{3}{16} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\mathrm{i} - \frac{3}{16}\cdot\mathrm{i}^2}{\Big(-\frac{3}{4}\Big)^2 + \Big(\frac{\sqrt{3}}{4}\Big)^2} = \frac{-\frac{3}{16} + \mathrm{i}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{16} + \frac{3}{16}}{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{3}}{16}\cdot\mathrm{i}}{\frac{12}{16}} = \frac{4\sqrt{3}}{16}\cdot\mathrm{i}\times\frac{16}{12} = \frac{4\sqrt{3}}{12}\cdot\mathrm{i}$$

On remarquera que le quotient est non-nul pour tout entier naturel n. Le numérateur ne s'annulant jamais, on en déduit pour tout entier n naturel : $z_n \neq z_{n+1}$

Des propriétés de l'argument, on a :

$$\frac{z_n - z_{n+1}}{0 - z_{n+1}} = \frac{4\sqrt{3}}{12}\cdot \mathrm{i}$$

$$\frac{z_n - z_{n+1}}{0 - z_{n+1}} = \frac{4\sqrt{3}}{12}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$\arg\left(\frac{z_n - z_{n+1}}{0 - z_{n+1}}\right) = \arg\left(\frac{4\sqrt{3}}{12}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}}\right)$$

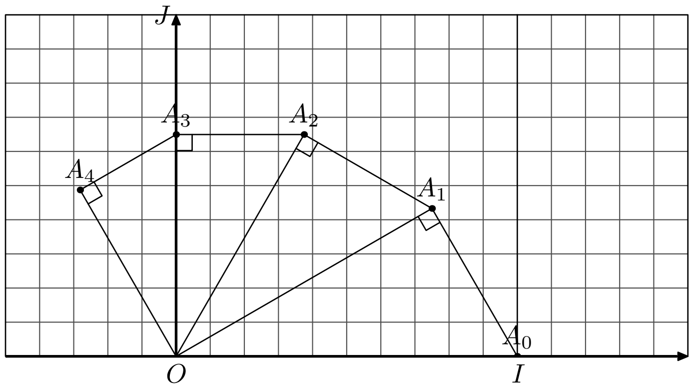
Puisque $z_{n+1}\neq 0$ et $z_{n+1}\neq z_n$, on a :

$$\left(\overrightarrow{A_{n+1}O}\,;\overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right) = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que le triangle OA_nA_{n+1} est un triangle rectangle en A_{n+1}.

Remarque : il était également possible de répondre à cette question à l'aide du théorème de Pythagore en cherchant les mesures OA_n, OA_{n+1} et A_nA_{n+1}. Cette démarche permet d'éviter de prouver que $z_{n+1}\neq 0$ et $z_{n+1}\neq z_n$.

3. Voici la représentation de ces cinq points :



Correction 11

1. a. On encadre la fonction cosinus sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par :

$$1 \leqslant \quad \cos(4x) \quad \leqslant 1$$
$$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}\cdot\cos(4x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$

b. On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} -\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$

A l'aide de l'encadrement obtenu à la question 1. et d'après le théorème des gendarmes, on obtient la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$$

2. L'abscisse x d'un point commun aux courbes Γ et $\mathscr{C}$ doit vérifier l'équation :

$$f(x) = g(x)$$
$$\mathrm{e}^{-x}\cdot\cos(4x) = \mathrm{e}^{-x}$$

La fonction exponentielle ne s'annulant pas :

$$\cos(4x) = 1$$

Cette équation se tranforme en les deux équations suivantes :

$4x = 0 + 2\cdot k\cdot\pi$	$4x = -0 + 2\cdot k\cdot\pi$
$x = k\cdot\frac{\pi}{2}$	$x = k\cdot\frac{\pi}{2}$

Travaillant sur l'ensemble $\left[0\,;+\infty\right[$, l'ensemble des abscisses de tous les points communs aux deux courbes Γ et $\mathscr{C}$ est :

$$\mathcal{S} = \left\{k\cdot\frac{\pi}{2}\;\middle|\; k\in\mathbb{N}\right\}.$$

3. a. On a les transformations suivantes :

$$u_n = f\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}^{-n\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot\cos\left(4\cdot n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \mathrm{e}^{-n\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot\cos\left(2\pi\cdot n\right) = \mathrm{e}^{-n\cdot\frac{\pi}{2}}\times 1$$
$$= \mathrm{e}^{-n\cdot\frac{\pi}{2}} = \left(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\right)^n$$

Cette expression du terme u_n de rang n montre que la suite $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

b. Le premier terme de la suite $\left(u_n\right)$ a pour valeur :

$$u_0 = f\left(0\times\frac{\pi}{2}\right) = f(0) = \mathrm{e}^{-0}\cdot\cos(4\times 0) = 1\times 1 = 1$$

On a les encadrements suivants :

$$\frac{\pi}{2} > 0$$
$$-\frac{\pi}{2} < 0$$

la fonction exponentielle est croissante :

$$\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} < \mathrm{e}^0$$
$$\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} < 1$$

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit l'encadrement de la raison :

$$0 < \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} < 1$$

La raison de la suite $\left(u_n\right)$ est strictement positive et strictement inférieure à 1. De plus, le premier terme de la suite $\left(u_n\right)$ est strictement positif.

On en déduit que la suite $\left(u_n\right)$ est strictement décroissante.

4. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad ; \quad v(x) = \cos(4x)$$

qui admette pour dérivées :

$$u'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \quad ; \quad v'(x) = -4\cdot\sin(4x)$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\cdot\cos(4x) + \mathrm{e}^{-x}\cdot\left[-4\sin(4x)\right]$$
$$= -\mathrm{e}^{-x}\left[\cos(4x) + 4\sin(4x)\right]$$

b. Les points d'intersection de ces deux courbes sont de la forme $k\cdot\frac{\pi}{2}$ où $n\in\mathbb{N}$. Pour montrer que ces deux courbes admettent la même tangente en chacun de ces points, il suffit de montrer qu'ils ont même nombre dérivée :

- $f'\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{e}^{k\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\cos\left(4\times k\cdot\frac{\pi}{2}\right) + 4\cdot\sin\left(4\times k\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]$

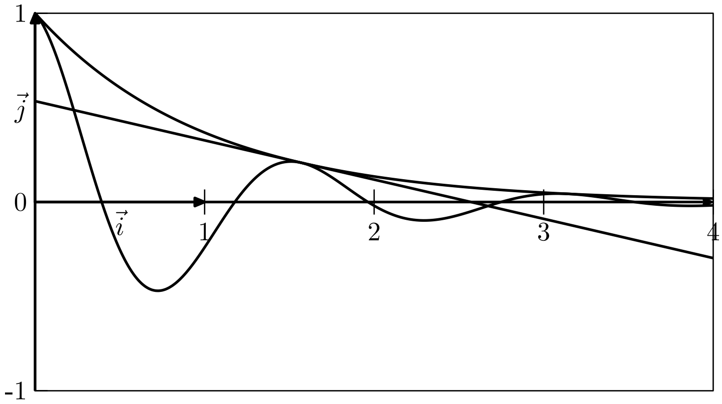
$$= -\mathrm{e}^{k\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\cos\left(2\cdot k\cdot\pi\right) + 4\cdot\sin\left(2\cdot k\cdot\pi\right)\right]$$
$$= -\mathrm{e}^{k\cdot\frac{\pi}{2}}\cdot\left(1 + 4\times 0\right) = -\mathrm{e}^{k\cdot\frac{\pi}{2}}$$

- $g'\left(k\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{e}^{k\cdot\frac{\pi}{2}}$

En chaque point de contact, ces deux courbes admettent la même tangente.

5. On a la valeur par excés : $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} = -0{,}2$

Voici la représentation demandée :

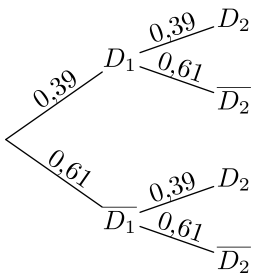


Correction 12

Les évènements D_1 et D_2 étant indépendants, on en déduit :
$\mathcal{P}_{D_1}\big(D_2\big) = \mathcal{P}\big(D_2\big) = 0{,}39$

De la propriété :
A et B indépendants $\implies$ A et $\overline{B}$ indépendants.
On en déduit : $\mathcal{P}_{\overline{D_1}}\big(D_2\big) = \mathcal{P}\big(D_2\big) = 0{,}39$

Ainsi, quelque soit le circuit utilisé, voici l'arbre de probabilités correspondant à cette exercice :



Notons $\mathcal{D}$: "*le circuit est défaillant*".

1. Pour que le circuit A, on a : $\mathcal{D} = D_1 \cap D_2$

   Ainsi, on a :
   $\mathcal{P}\big(\mathcal{D}\big) = \mathcal{P}\big(D_1 \cap D_2\big)$

   Les évènements D_1 et D_2 étant indépendants :

   $= \mathcal{P}\big(D_1\big) \times \mathcal{P}\big(D_2\big) = 0{,}39 \times 0{,}39 = 0{,}1521$

2. Pour le circuit B, on remarque que : $\overline{\mathcal{D}} = \overline{D_1} \cap \overline{D_2}$

   Ainsi, on a le calcul de probabilité :
   $\mathcal{P}\big(\mathcal{D}\big) = 1 - \mathcal{P}\big(\overline{\mathcal{D}}\big) = 1 - \mathcal{P}\big(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}\big)$

   Les évènements $\overline{D_1}$ et $\overline{D_2}$ sont indépendants :

   $= 1 - \mathcal{P}\big(\overline{D_1}\big) \times \mathcal{P}\big(\overline{D_2}\big) = 1 - 0{,}61 \times 0{,}61$
   $= 1 - 0{,}3721 = 0{,}6279$