BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2018/2019

BAC BLANC

MATHÉMATIQUES

SÉRIE: S – SVT

Spécialité ISN

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES **COEFFICIENT: 7**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 .

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les QUATRE exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (*5 points*)

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.
Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètre de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.
Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 10\mathrm{e}^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$u(x) = -\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que pour tout x positif on a $f'(x) = -u(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
En déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

2. (a) Calculer $f(20)$.
En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

(b) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.
On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$.
On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0;+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\mathrm{e}^{u(x)}\big(1+u(x)\big).$$

(a) Déterminer les variations de f' sur $[0;+\infty[$.

(b) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

Exercice 2 (*5 points*)

Les deux parties de cet exercice pourront être traitées de manière indépendante.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

Partie A

On sait que pour 2 points distincts A d'affixe z_A et B d'affixe z_B on a $\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}\right) = arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$.

1. Montrer que pour tout point C d'affixe z_C et D d'affixe z_D on a :

$$\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$$

2. On donne $z_A = -2+2i$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 4i$.

a) Calculer $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right|$ et $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$.

b) En déduire que le triangle ABC est isocèle rectangle.

Partie B
On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Déterminer les formes exponentielles de $1+i$ et de $1-i$ puis en déduire celle de z_n.
2. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
   (b) Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

3. Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel ?

Exercice 3 (*5 points*)

Les deux parties de cet exercice pourront être traitées de manière indépendante.

Partie A
Une épreuve de culture générale consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose quatre réponses possibles, dont une seule est correcte. À chaque question, le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse. Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si sa réponse est fausse.

- Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions.
  Autrement dit, pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est égale à $\frac{1}{4}$;
- Barbara est un peu mieux préparée. On considère que pour chacune des vingt questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{1}{2}$;
- Camille fait encore mieux: pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{3}$.

1. On note X, Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X? Justifier.
   (b) À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geq 10)$.

Dans la suite, on admettra que $P(Y \geq 10) \approx 0{,}588$ et $P(Z \geq 10) \approx 0{,}962$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats.
   On note A, B, C et M les évènements:

   - A: « la copie choisie est celle d'Anselme » ;
   - B: « la copie choisie est celle de Barbara » ;
   - C: « la copie choisie est celle de Camille » ;
   - M: « la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 » .

   On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.
   Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara?
   On donnera l'arrondi au millième de cette probabilité.

Partie B

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Il sera attribué 0,5 point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs. La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0, 9 est :

$a)$ 6	$b)$ 7	$c)$ 10	$d)$ 12

2. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.
Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants. La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est au millième près :

$a)$ $0,032$	$b)$ $0,461$	$c)$ $0,132$	$d)$ $0,023$

3. Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que :

$$p(A) = 0,3 \quad et \ p(A \cup B) = 0,65$$

La probabilité de l'événement B est :

$a)$ $0,5$	$b)$ $0,35$	$c)$ $0,46$	$d)$ $0,7$

4. Une urne contient 5 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues. Les boules sont indiscernables au toucher. L'expérience consiste à tirer au hasard successivement avec remise 2 boules de l'urne.
La probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est :

$a)$ $\frac{1}{4}$	$b)$ $\frac{1}{3}$	$c)$ $\frac{31}{50}$	$d)$ $\frac{19}{50}$

Exercice 4 (*5 points*)

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$. On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$
(a) Justifier que g est croissante sur [0 ; 60].

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.

(a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.

(b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 55$.

(c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

(d) En déduire la convergence de la suite (u_n).

(e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50000 individus avec ce second modèle.
Il utilise l'algorithme suivant.

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 12$
$Tant\ que$ … … … … … … … … …
  $u \leftarrow$ … … … ..
  $n \leftarrow$ … … … ..
$Fin\ de\ tant\ que$
$Afficher\ la\ valeur\ de$ … … … … … …

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que
$$u_r \geq 50$$