BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2018/2019

BAC BLANC

MATHÉMATIQUES

SÉRIE: S – SVT

Spécialité Maths

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES **COEFFICIENT: 9**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 .

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les QUATRE exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (*5 points*)

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.
Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètre de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.
Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 10\mathrm{e}^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$u(x) = -\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que pour tout x positif on a $f'(x) = -u(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
En déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

2. (a) Calculer $f(20)$.
En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

(b) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.
On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$.
On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0;+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que :

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\mathrm{e}^{u(x)}\big(1+u(x)\big).$$

(a) Déterminer les variations de f' sur $[0;+\infty[$.

(b) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

Exercice 2 (*5 points*)

Les deux parties de cet exercice pourront être traitées de manière indépendante.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$.

Partie A

On sait que pour 2 points distincts A d'affixe z_A et B d'affixe z_B on a $\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}\right) = arg(z_B - z_A\,)\ [2\pi]$.

1. Montrer que pour tout point C d'affixe z_C et D d'affixe z_D on a :

$$\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$$

2. On donne $z_A = -2+2i$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 4i$.

(a) Calculer $\left|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right|$ et $\arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)$.

(b) En déduire que le triangle ABC est isocèle rectangle.

Partie B
On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1 + \mathrm{i}}{(1 - \mathrm{i})^n}$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Déterminer les formes exponentielles de $1 + i$ et de $1 - i$ puis en déduire celle de z_n.
2. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
   (b) Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

3. Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel ?

Exercice 3 (*5 points*)

Les deux parties de cet exercice pourront être traitées de manière indépendante.

Partie A

Une épreuve de culture générale consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose quatre réponses possibles, dont une seule est correcte. À chaque question, le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse. Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si sa réponse est fausse.

- Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions.
  Autrement dit, pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est égale à $\frac{1}{4}$;
- Barbara est un peu mieux préparée. On considère que pour chacune des vingt questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{1}{2}$;
- Camille fait encore mieux: pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{3}$.

1. On note X, Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X? Justifier.
   (b) À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geq 10)$.

Dans la suite, on admettra que $P(Y \geq 10) \approx 0{,}588$ et $P(Z \geq 10) \approx 0{,}962$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats.
   On note A, B, C et M les évènements:

   - A: « la copie choisie est celle d'Anselme » ;
   - B: « la copie choisie est celle de Barbara » ;
   - C: « la copie choisie est celle de Camille » ;
   - M: « la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 » .

   On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.
   Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara?
   On donnera l'arrondi au millième de cette probabilité.

Partie B

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Il sera attribué 0,5 point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs. La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0, 9 est :

$a)$ 6	$b)$ 7	$c)$ 10	$d)$ 12

2. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.
Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants. La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est au millième près :

$a)$ $0,032$	$b)$ $0,461$	$c)$ $0,132$	$d)$ $0,023$

3. Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers Ω tels que :

$$p(A) = 0,3 \quad et \quad p(A \cup B) = 0,65$$

La probabilité de l'événement B est :

$a)$ $0,5$	$b)$ $0,35$	$c)$ $0,46$	$d)$ $0,7$

4. Une urne contient 5 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues. Les boules sont indiscernables au toucher. L'expérience consiste à tirer au hasard successivement avec remise 2 boules de l'urne.
La probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est :

$a)$ $\frac{1}{4}$	$b)$ $\frac{1}{3}$	$c)$ $\frac{31}{50}$	$d)$ $\frac{19}{50}$

Exercice 4 (5 points)

Partie A : préliminaires

1. ***a.*** Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :
$$n^2 \equiv N - 1 \ \ mod \ \ N$$
Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \ \ mod \ \ N$.

   b. Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \ \ mod \ \ 26$.

On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leq k \leq 25$ et $5k \equiv 1 \ \ mod \ \ 26$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

   a. Calculer la matrice $6A - A^2$.

   b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.

   c. Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

   d. Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU » (mot à coder) donne « YE » :
$$\text{OU} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{YE}.$$

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que : $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$.
2. En utilisant la question 1. b. de la partie A, établir que : $\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \ \ mod \ \ 26 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \ \ mod \ \ 26 \end{cases}$.
3. Décoder le mot « QP ».