Correction du Bac Blanc

Exercice 1 (4 points) **Am du Sud Nov 2018**

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours.
Lors de la repousse, on modélise la longueur en centimètre de la queue du lézard en fonction du nombre de jours.
Cette longueur est modélisée par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=10\mathrm{e}^{u(x)}$

où u est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $u(x)=-\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}$
On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Vérifier que pour tout x positif on a $f'(x)=-u(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
En déduire le sens de variations de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

On a $f'(x)=10\,\mathrm{e}^{\,u(x)}\times u'(x)$; or $u'(x)=-\left(-\frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{\,2-\frac{x}{10}}\right)=-\frac{1}{10}\left(-\,\mathrm{e}^{\,2-\frac{x}{10}}\right)=-\frac{1}{10}u(x)$.
Donc $f'(x)=-u(x)\,\mathrm{e}^{\,u(x)}$.
On sait que, quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}>0$, donc $u(x)<0$ et comme $\mathrm{e}^{u(x)}>0$ quel que soit u, on a finalement $f'(x)>0$: la fonction f est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. a) Calculer $f(20)$.
En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

$f(20)=10\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2-\frac{20}{10}}}=10\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2-2}}=10\mathrm{e}^{-1}=\frac{10}{\mathrm{e}}$.

Comme $\frac{10}{\mathrm{e}}\approx 3{,}678$ soit environ 3,7 cm : c'est la taille de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

b) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}=0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}10\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}}=10\mathrm{e}^{0}=10$.
La fonction est strictement croissante de $f(20)\approx 3{,}7$ à 10 valeur maximale : la taille de la repousse ne sera jamais égale à 11 cm.

3. On souhaite déterminer au bout de combien de jours la vitesse de croissance est maximale.
On admet que la vitesse de croissance au bout de x jours est donnée par $f'(x)$.
On admet que la fonction dérivée f' est dérivable sur $[0;+\infty[$, on note f'' la fonction dérivée de f' et on admet que : $f''(x)=\frac{1}{10}u(x)\mathrm{e}^{u(x)}\big(1+u(x)\big)$.
a) Déterminer les variations de f' sur $[0;+\infty[$.

Comme $\frac{1}{10}>0$ et $\mathrm{e}^{u(x)}>0$, le signe de $f''(x)$ est celui du produit $u(x)(1+u(x))$.
On sait que quel que soit x, $u(x)<0$.
D'autre part $1+u(x)>0\Leftrightarrow u(x)>-1\Leftrightarrow -\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}>-1\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}<1\Leftrightarrow 2-\frac{x}{10}<0\Leftrightarrow 2<\frac{x}{10}\Leftrightarrow x>20$.
Conclusion : $f''(x)>0$ sur $[0\,;20]$ et $f''(x)<0$ sur $[20;+\infty[$.
f' est donc croissante sur $[0\,;20]$ et décroissante sur $[20;+\infty[$.

b) En déduire au bout de combien de jours la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale.

D'après le résultat précédent la vitesse est maximale pour $x=20$: la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale au bout de 20 jours.

Exercice 2 (*6 points*) **Nlle_Caledonie_28_nov_2017**

Les deux parties de cet exercice pourront être traitées de manière indépendante.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$.

Partie A

On sait que pour 2 points distincts A d'affixe z_A et B d'affixe z_B on a $\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}\right) = arg(z_B - z_A\,)\ [2\pi]$.

1) Montrer que pour tout point C d'affixe z_C et D d'affixe z_D on a :

$$\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$$

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}\right) &= \left(\overrightarrow{AB}\,,\vec{u}\right) + \left(\vec{u}\,,\overrightarrow{CD}\right)\\ &= -\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}\right) + \left(\vec{u}\,,\overrightarrow{CD}\right) = \left(\vec{u}\,,\overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB}\right)\\ &= arg(z_D - z_C\,) - arg(z_B - z_A\,) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]\end{aligned}$$

2) On donne $z_A = -2 + 2i$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = 4i$.

a) Calculer $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right|$ et $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)$.

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{(2+2i) - 4i}{(-2+2i) - 4i} = \frac{2-2i}{-2-2i} = \frac{2-2i}{-2-2i} = i\quad donc\quad \left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = |i| = 1$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ \ mod\ 2\pi$$

b) En déduire que le triangle ABC est isocèle rectangle.

Le triangle est rectangle en C car $\left(\overrightarrow{CA}\,,\overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{2}$.

De plus, $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = 1 \Leftrightarrow\ |z_B - z_C| = |z_A - z_C|\ \Leftrightarrow CB = CA$; il est aussi isocèle.

Partie B

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Déterminer les formes exponentielles de $1 + i$ et de $1 - i$ puis en déduire celle de z_n.

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

Donc $z_n = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^n} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n e^{-\frac{in\pi}{4}}} = \left(\sqrt{2}\right)^{1-n} e^{\frac{i(n+1)\pi}{4}}$.

Finalement la forme exponentielle de z_n est $\left(\sqrt{2}\right)^{1-n} e^{\frac{i(n+1)\pi}{4}}$.

2. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.

$$\arg(z_n) = \frac{(n+1)\pi}{4} \quad [2\pi] \quad et \quad \arg(z_{n+4}) = \frac{(n+5)\pi}{4} \quad [2\pi]$$

Donc :

$$\arg\left(\frac{z_{n+4}}{z_n}\right) = \arg(z_{n+4}) - \arg(z_n) = \frac{(n+5)\pi}{4} - \frac{(n+1)\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi \quad [2\pi]$$

Comme $e^{i\pi} = -1$, $\frac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.

(b) Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

$$\left(\overrightarrow{OA_n}, \overrightarrow{OA_{n+4}}\right) = arg\left(\frac{z_{n+4}}{z_n}\right) \ [2\pi] = \pi \ [2\pi]$$

Donc les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.

3. Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel ?

$$z_n \in \mathbb{R} \iff \arg(z_n) = k\pi \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\arg(z_n) = \frac{(n+1)\pi}{4} = k\pi \iff n+1 = 4k \iff n = 4k-1$$

Finalement, $z_n \in \mathbb{R} \iff n = 4k-1$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3 (*5 points*) **Nlle Cal Nov 2018)**

Les deux parties de cet exercice pourront être traitées de manière indépendante.

Partie A

Une épreuve de culture générale consiste en un questionnaire à choix multiple (QCM) de vingt questions. Pour chacune d'entre elles, le sujet propose quatre réponses possibles, dont une seule est correcte. À chaque question, le candidat ou la candidate doit nécessairement choisir une seule réponse. Cette personne gagne un point par réponse correcte et ne perd aucun point si sa réponse est fausse.

- Anselme répond complètement au hasard à chacune des vingt questions.
  Autrement dit, pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est égale à $\frac{1}{4}$;
- Barbara est un peu mieux préparée. On considère que pour chacune des vingt questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{1}{2}$;
- Camille fait encore mieux: pour chacune des questions, la probabilité qu'elle réponde correctement est de $\frac{2}{3}$.

1. On note X, Y et Z les variables aléatoires égales aux notes respectivement obtenues par Anselme, Barbara et Camille.

(a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X? Justifier.

Il y a 20 questions qui sont indépendantes donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de bonnes réponses d'Anselme, donc sa note, suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}25$.

(b) À l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geq 10)$.

À l'aide de la calculatrice, l'arrondi au millième de la probabilité $P(X \geq 10)$ est 0,014.

Dans la suite, on admettra que $P(Y \geq 10) \approx 0{,}588$ et $P(Z \geq 10) \approx 0{,}962$.

2. On choisit au hasard la copie d'un de ces trois candidats.
On note A, B, C et M les évènements:

- A: la copie choisie est celle d'Anselme ;
- B: la copie choisie est celle de Barbara ;
- C: la copie choisie est celle de Camille ;
- M: la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 .

On constate, après l'avoir corrigée, que la copie choisie obtient une note supérieure ou égale à 10 sur 20.
Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara?
On donnera l'arrondi au millième de cette probabilité.

La probabilité qu'il s'agisse de la copie de Barbara est $P_M(B)$ soit $\frac{P(B\cap M)}{P(M)}$.

- On choisit au hasard la copie d'un des trois candidats donc $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$.
- $P(B \cap M) = P(B) \times P_B(M)$.
  D'après le contexte, $P_B(M) = P(Y \geq 10)$ donc $P(B \cap M) = \frac{1}{3} \times 0{,}588$.
- D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(M) &= P(A \cap M) + P(B \cap M) + P(C \cap M) \\ &= P(A) \times P_A(M) + P(B) \times P_B(M) + P(C) \times P_C(M) \\ &= P(A) \times P(X \geq 10) + P(B) \times P(Y \geq 10) + P(C) \times P(Z \geq 10) \\ &= \frac{1}{3} \times 0{,}014 + \frac{1}{3} \times 0{,}588 + \frac{1}{3} \times 0{,}962 = \frac{1{,}564}{3} \end{aligned}$$

Donc $P_M(B) = \frac{\frac{0.588}{3}}{\frac{1{,}564}{3}}$ dont l'arrondi au millième est 0,376.

Partie B

Cette partie est un questionnaire à choix multiples constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune d'elles, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Il sera attribué 0,5 point si la réponse est exacte, zéro sinon.

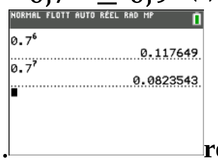
1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0,3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs. La valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à 0, 9 est :

~~a) 6~~	b) 7	~~c) 10~~	~~d) 12~~

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de fois ou le tireur atteint sa cible au cours des n tirs. X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}3$. Ainsi $p_n = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0{,}3^0 \times 0{,}7^n = 0{,}7^n$$

Donc $p_n = 1 - 0{,}7^n$ et $p_n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - 0{,}7^n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}7^n \leq 0{,}1$



. **réponse b).**

2. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1.
Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants. La probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie est au millième près :

a) 0, 032	~~b) 0, 461~~	~~c) 0, 132~~	~~d) 0, 023~~

Le nombre X de fois où le joueur perd au cours d'une partie suit la loi binomiale $\mathcal{B}(5, \frac{1}{6})$, donc: $p(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}032$: **réponse a)**.

3. Soient A et B deux événements indépendants d'un même univers **Ω** tels que :

$$p(A) = 0,3 \quad et \quad p(A \cup B) = 0,65$$

La probabilité de l'événement B est :

a) 0, 5	~~b) 0, 35~~	~~c) 0, 46~~	~~d) 0,7~~

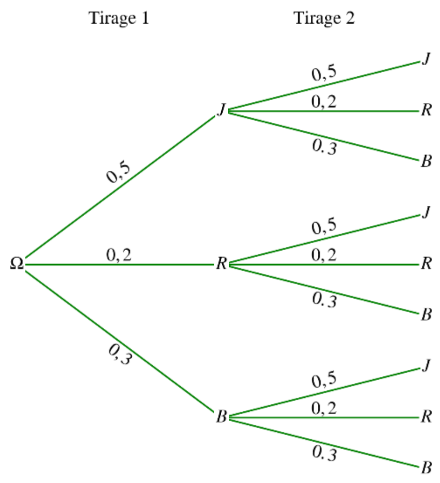
A et B sont indépendants, donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
L'égalité $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ devient donc: $0{,}65 = 0{,}3 + p(B) - 0{,}3p(B)$, qui équivaut à $0{,}35 = 0{,}7p(B)$, d'où $p(B) = 0{,}5$: **réponse a)**.

4. Une urne contient 5 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues. Les boules sont indiscernables au toucher. L'expérience consiste à tirer au hasard successivement avec remise 2 boules de l'urne.
La probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est :

~~a)~~ $\cancel{\frac{1}{4}}$	~~b)~~ $\cancel{\frac{1}{3}}$	~~c)~~ $\cancel{\frac{31}{50}}$	d) $\frac{19}{50}$

La situation devient plus claire à l'aide d'un arbre de probabilité :

$$\begin{aligned} P(2\ boules\ de\ même\ couleur) &= P(2\ Jaunes) + P(2\ Rouges) + P(2\ Bleues) \\ &= 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}38 = \frac{19}{50} \end{aligned}$$



Exercice 4 (*5 points*) Centres_Etrangers_2014

Partie A : préliminaires

1. a. Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :

$$n^2 \equiv N - 1 \;\; mod \;\; N$$

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \;\; mod \;\; N$.

$$n^2 \equiv N - 1 \text{ [N]} \Rightarrow (n^2)^2 \equiv (N-1)^2 \; [N]$$

Or $(N-1)^2 = N^2 - 2N + 1$ et $N^2 \equiv 0$ [N] et $-2N \equiv 0 \; [N]$, donc $(N-1)^2 \equiv 1 \; [N]$.
Finalement $n \times n^3 \equiv 1 \; [N]$ car $n^4 = n \times n^3$.

b. Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \;\; mod \;\; 26$.
On a $5^2 = 25 = 26 - 1$, donc $5^2 \equiv -1 \;\; [26]$.
La question précédente montre que $5 \times 5^3 \equiv 1 \;\; [26]$.
Donc $k_1 = 5^3 = 125$.

On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leq k \leq 25$ et $5k \equiv 1 \;\; mod \;\; 26$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice $6A - A^2$.

$6A = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 19 & 6 \\ 18 & 7 \end{pmatrix}$, donc $6A - A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I$ (I matrice unité).

b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.

On a $6A - A^2 = A(6I - A) = 5I$ ou encore $A \times \frac{1}{5}(6I - A) = I$: cette égalité montre que la matrice A est inversible et que son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{5}(6I - A) = \frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A$$

c. Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

$A^{-1} = \frac{6}{5}I - \frac{1}{5}A \Leftrightarrow 5A^{-1} = 6I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = B$.
Conclusion $B = 5A^{-1}$.

d. Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.
$B = 5A^{-1} \Leftrightarrow BA = 5A^{-1}A \Leftrightarrow BA = 5I \Leftrightarrow BAX = 5IX \Leftrightarrow BY = 5X$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU » (mot à coder) donne « YE » :

$$\text{OU} \to X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \to \text{YE}.$$

ET est codé par la matrice $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix}$.

Puis $Y = AX = \begin{pmatrix} 35 \\ 50 \end{pmatrix}$, puis $R = \begin{pmatrix} 9 \\ 24 \end{pmatrix}$ et d'après le tableau ET est codé JY .

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que : $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$.

On a $Y = AX \iff A^{-1}Y = X \iff 5A^{-1}Y = 5X = BY$ soit $Y = AX \iff \begin{cases} 5x_1 & = & 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 & = & -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$

2. En utilisant la question 1. b. de la partie A, établir que : $\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \ \ mod \ \ 26 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \ \ mod \ \ 26 \end{cases}$.

La question 1. b. de la **partie A** a montré que $5 \times 21 \equiv 1 \ \ [26]$. Donc en reprenant le système de la question précédente et en multipliant par 21, on obtient :

$$\begin{cases} 21 \times 5x_1 & = & 21 \times (2y_1 - y_2) \\ 21 \times 5x_2 & = & 21 \times (-3y_1 + 4y_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 21 \times 5x_1 & = & 42y_1 - 21y_2 \\ 21 \times 5x_2 & = & -63y_1 + 84y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 \ [26] \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 \ [26] \end{cases}$$

3. Décoder le mot « QP ».

QP est associé à la matrice $\begin{pmatrix} 16 \\ 15 \end{pmatrix}$.

En utilisant le résultat précédent :

$$\begin{cases} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 \ [26] \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 \ [26] \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & \equiv & 256 + 75 \ [26] \\ x_2 & \equiv & 240 + 90 \ [26] \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & \equiv & 331 \ [26] \\ x_2 & \equiv & 330 \ [26] \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = & 19 \\ x_2 & = & 18 \end{cases}$$

Le mot décodé est donc TS .

Exercice 4 (*5 points*) **Amerique_Sud_21_nov_2017**

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

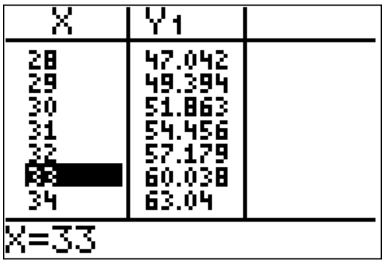
Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$. On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.

Augmenter de 5 %, c'est multiplier par $1 + \frac{5}{100} = 1{,}05$; la suite (v_n) est donc géométrique de premier terme $v_0 = 12$ et de raison $q = 1{,}05$.
Donc, pour tout n, on a: $v_n = v_0 \times q^n = 12 \times 1{,}05^n$.

2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Il faut regarder si ce modèle permet de limiter la population à 60 000 individus, autrement dit chercher n tel que $v_n > 60$ à l'aide de la calculatrice par exemple.
Donc pour $n = 33$ c'est-à-dire en 2049, la population dépassera 60 000 individus.



Ce modèle ne répond donc pas aux contraintes du milieu naturel.

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1{,}1}{605}u_n^2 + 1{,}1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1x.$$

(a) Justifier que g est croissante sur [0 ; 60].

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -\frac{1{,}1}{605} \times 2x + 1{,}1 = -\frac{2{,}2}{605}x + 1{,}1$.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2{,}2}{605}x + 1{,}1 > 0 \Leftrightarrow 1{,}1 > \frac{2{,}2}{605}x \Leftrightarrow \frac{1{,}1 \times 605}{2{,}2} > x \Leftrightarrow x < 302{,}5$$

Donc $g'(x) > 0$ sur $[0; 60]$ donc g est croissante sur $[0; 60]$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

$$g(x) = x \Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1x = x \Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 0{,}1x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1{,}1}{605}x + 0{,}1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -\frac{1{,}1}{605}x + 0{,}1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 0{,}1 = \frac{1{,}1}{605}x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 55$$

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.

(a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.

$$u_1 = g(u_0) = g(12) \approx 12{,}938$$

Avec ce modèle, on peut estimer la population à 12 938 individus en 2017.

(b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 55$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $0 \leq u_n \leq 55$.

*** Initialisation**

Pour $n = 0$, $u_0 = 12$ et $0 \leq 12 \leq 55$ donc la propriété est vraie au rang 0.

*** Hérédité**

On suppose que le propriété est vraie au rang $n \geq 0$, c'est-à -dire que $0 \leq u_n \leq 55$; c'est l'hypothèse de récurrence.
Or $0 \in [0; 60]$ et $55 \in [0; 60]$; de plus on sait que la fonction g est croissante sur $[0; 60]$ donc de $0 \leq u_n \leq 55$, on peut déduire que $g(0) \leq g(u_n) \leq g(55)$.
Les nombres 0 et 55 sont solutions de l'équation $g(x) = x$ donc $g(0) = 0$ et $g(55) = 55$; de plus, $g(u_n) = u_{n+1}$.
Donc $g(0) \leq g(u_n) \leq g(55)$ équivaut à $0 \leq u_{n+1} \leq 55$ et on a donc démontré que la propriété était vraie au rang $n + 1$.

*** Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 0$.
On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 55$.

(c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout n,

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n - u_n = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 0,1u_n = u_n\left(-\frac{1,1}{605}u_n + 0,1\right) = \frac{1,1}{605}u_n(55 - u_n)$$

On sait que $0 \leq u_n \leq 55$ donc $55 - u_n \geq 0$ donc $\frac{1,1}{605}u_n(55 - u_n) \geq 0$.
On a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n donc la suite (u_n) est croissante.

(d) En déduire la convergence de la suite (u_n).

La suite (u_n) est croissante et majorée par 55 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

(e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$ donc elle est solution de l'équation $g(x) = x$.
L'équation $g(x) = x$ n'admet que 2 solutions: 0 et 55.
La suite (u_n) est croissante et $u_0 = 12$ donc la limite ℓ de la suite est supérieure ou égale à 12.
On en déduit donc que $\ell = 55$ ce qui signifie que, selon ce modèle, la population va tendre vers 55000 individus.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50000 individus avec ce second modèle.
Il utilise l'algorithme suivant.

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 12$
$Tant\ que\ \boldsymbol{u < 50}$
$\quad u \leftarrow \boldsymbol{1{,}1u - \dfrac{1{,}1}{605}u^2}$
$\quad n \leftarrow \boldsymbol{n + 1}$
$Fin\ de\ tant\ que$
$Afficher\ la\ valeur\ de\ \boldsymbol{n}$

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que

$$u_r \geq 50$$