Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°4 Durée 1h35 mn	20 février 2019

Exercice 1 (4,5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Dans les deux questions suivantes, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,)$.

a) Soit S le point de coordonnées $(1\,;3\,;5)$ et Δ_1 la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 5-4t\,, t \in \mathbb{R} \\ z &= 2-2t \end{cases}$$

Affirmation 1 : la droite Δ_2 de représentation paramétrique

$\begin{cases} x &= -t \\ y &= 7+4t\,, t \in \mathbb{R} \\ z &= 7+2t \end{cases}$ est la droite parallèle à la droite Δ_1 passant par le point S.

Nous allons commencer par déterminer si les droites sont parallèles puis si $S \in \Delta_2$.

- Δ_1 et Δ_2 sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeur sont colinéaires.

$\vec{u}_1\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}$ dirige Δ_1 et $\vec{u}_2\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$ dirige Δ_2.
Comme $\vec{u}_1 = -1 \times \vec{u}_2$, les vecteurs sont colinéaires et les droites Δ_1 et Δ_2 sont donc parallèles.

- S $(1\,;3\,;5) \in \Delta_2 \Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} 1 &= -t \\ 3 &= 7+4t\,, t \in \mathbb{R} \\ 5 &= 7+2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t &= -1 \\ 3 &= 3 \\ 5 &= 5 \end{cases}$.

  Pour $t = -1$ on trouve bien les coordonnées de S donc $S \in \Delta_2$.

L'affirmation est **VRAIE**

b) On considère les points I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).

Affirmation 2 : la droite Δ de représentation paramétrique

$\begin{cases} x &= 2-t \\ y &= 6-2t\,, t \in \mathbb{R} \\ z &= -2+t \end{cases}$ coupe le plan (IJK) au point $\mathrm{E}\left(-\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{1}{2}\right)$.

Nous allons vérifier que le point E appartient bien à Δ puis, à l'aide d'une représentation paramétrique du plan (IJK) déterminer si le point E appartient à (IJK).

- $S\left(-\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{1}{2}\right) \in \Delta_2 \Leftrightarrow$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} -\frac{1}{2} & = & 2-t \\ 1 & = & 6-2t\,, t \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} & = & -2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t & = & \frac{5}{2} \\ t & = & \frac{5}{2} \\ t & = & \frac{5}{2} \end{cases}$

  Pour $t = \frac{5}{2}$ on trouve bien les coordonnées de S donc $S \in \Delta$.

- Il est immédiat que les points I, J et K ne sont pas alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont non colinéaires et, par conséquent, dirigent le plan (IJK).

  $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi une représentation paramétrique de (IJK) est :

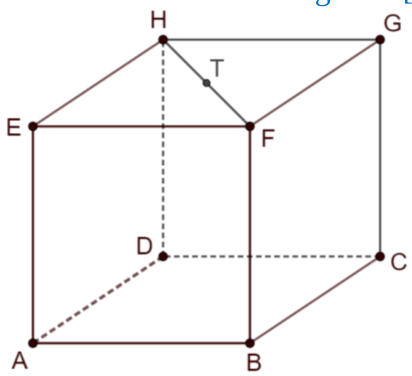
  $$\begin{cases} x & = & 1-1\times t-1\times t' \\ y & = & 0+1\times t+0\times t'\,, t \; et \; t' \in \mathbb{R} \\ z & = & 0+0\times t+1\times t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1-1t-1t' \\ y & = & t & , t \; et \; t' \in \mathbb{R} \\ z & = & t' \end{cases}$$

  $$S\left(-\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{1}{2}\right) \in (IJK) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} & = & 1-1t-1t' \\ 1 & = & t \\ \frac{1}{2} & = & t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} & = & -\frac{1}{2} \\ 1 & = & t \\ \frac{1}{2} & = & t' \end{cases}$$

  Pour $t = 1$ et $t' = \frac{1}{2}$ on trouve bien les coordonnées de S donc $S \in$ (IJK) .

Conclusion : $S \in \Delta \cap (IJK)$.
L'affirmation est **VRAIE**

2. Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].



<u>**Affirmation 3 :**</u> les droites (AT) et (EC) sont orthogonales

Dans le repère orthonormal $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ (il suffit de prendre $AB = 1\,unit\acute{e}$).
$A(0\,;0\,;0)$, $T\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2};1\right)$ donc $\overrightarrow{AT}\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$
$E(0\,;0\,;1)$, $C(1\,;1\,;0)$ donc $\overrightarrow{EC}(1\,;1\,;-1)$
$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 1+1\times(-1) = 0$ donc $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{EC}$ et les droites sont orthogonales.
L'affirmation est **VRAIE**

Exercice 2 (16×1 *points*)

QCM n°1

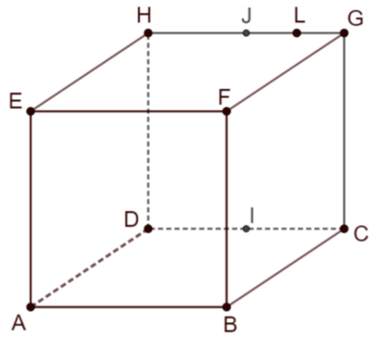
Répondre sur la fiche réponse en page 4

Cet exercice comporte 11 questions et 16 bonnes réponses.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées.
Une question peut comporter une ou deux bonnes réponses.
Déterminer celles qui sont correctes.

Barême :

- Si trois réponses sont données à la même question
  - -1 à la question concernée.
- Si le nombre de réponse proposé est inférieur ou égal à 16
  - 1 point par bonne réponse et 0 par réponse fausse.
- Si le nombre de réponse proposé est strictement supérieur à 16
  - 1 point par bonne réponse et $-1{,}5$ par mauvaise réponse

Partie A - On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté a, avec I, J les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[GH]$ et L est le milieu du segment $[GH]$.



1) La droite (BI) est :

a) orthogonale à (IJ)	b) orthogonale à (IL)	c) orthogonale à (DG)

2) L'intersection du plan (BIL) avec le plan (ABF) est :

a) une droite passant par le milieu de $[AB]$	b) une droite passant par le point B	c) une droite parallèle à (IL)

3) La section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (BIJ) est :

a) un triangle	b) un parallélogramme	c) un trapèze

4) Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on a :

a) $\overrightarrow{BJ}(-0{,}5\,;1;1)$	b) les points L, I, B et F sont coplanaires	$\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{CG}$

Partie B - Dans un repère $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,\right)$ de l'espace, on considère les points $A(1\,;0\,;2)$, $B(2\,;1\,;2)$, $C(3\,;0\,;0)$ et $D(5\,;-2\,;-4)$.

1) Les points A, B et C :

a) sont alignés	b) sont coplanaires	c) définissent un plan

2) Les points A, B, C et D :

a) ne sont pas coplanaires	b) vérifient l'égalité $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$	c) $D \in (BC)$

3) Une représentation paramétrique du plan (ABC) est :

a) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$	b) $\begin{cases} x = 5 + t + 4t' \\ y = -2 - t - 2t' \\ z = -4 - 2t - 6t' \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$	c) $\begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ y = t \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et $t' \in \mathbb{R}$

4) Soit $E(3\,;4\,;5)$:

a) la droite parallèle à (AB) et passant par E a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t\,,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 5 \end{cases}$	b) le point E appartient au plan (ABC)	c) les droites (AB) et (DE) sont non coplanaires

Partie C - Dans un repère $\left(O\,;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,\right)$ de l'espace, on considère les droites

$$d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } d' : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 4t\ \ t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$$

et le plan $\wp$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + t - t' \\ y = -2t + 3t'\ \ t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R} \\ z = 4 - t' \end{cases}$

1)

a) la droite d est parallèle au plan $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$	b) la droite d est parallèle au plan $\left(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{k}\right)$	c) la droite d est parallèle à la droite $(O\,;\vec{k}\,)$

2)

a) d et $\wp$ sont parallèles	b) d et $\wp$ sont sécants en $A(-1\,;4\,;3)$	c) d est inclus dans $\wp$

3)

a) d et d' sont parallèles	b) d et d' sont sécantes	c) d est d' ne sont pas coplanaires

NOM :……………………………….
Prénom : …………………………….

QCM n°1

Grille réponse

Une Croix ✕ dans la case correspond à une bonne réponse.

	a)	b)	c)
Question A)-1)			
Question A)-2)			
Question A)-3)			
Question A)-4)			
Question B)-1)			
Question B)-2)			
Question B)-3)			
Question B)-4)			
Question C)-1)			
Question C)-2)			
Question C)-3)			