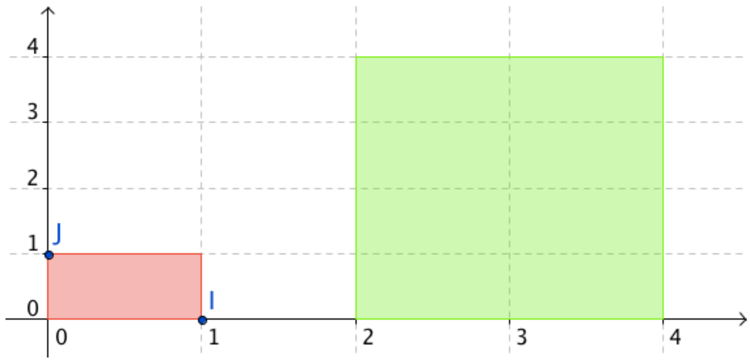
INTEGRATION (Partie 1)

<u>Activité 1 page 184 :</u> Aire sous une hyperbole à l'aide de rectangles

I. *Intégrale d'une fonction continue et positive*

1) Unité d'aire

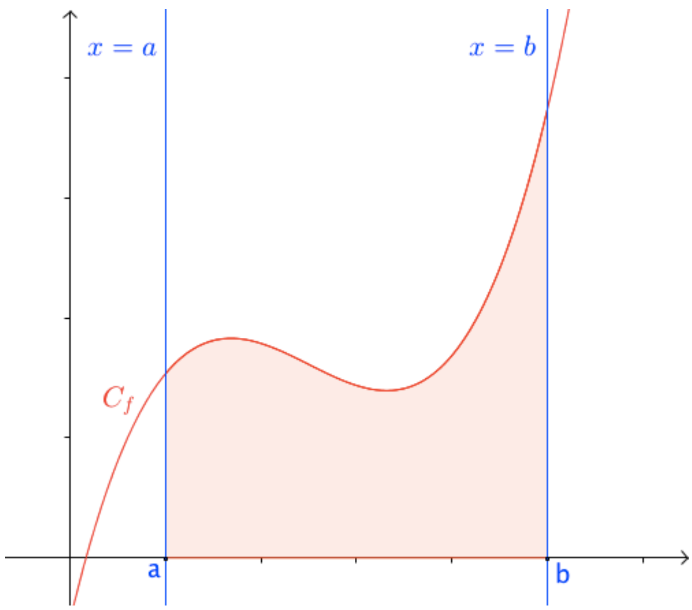


Dans le repère (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.
L'aire du rectangle vert est égale 8 fois à l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

2) Définition

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.
On appelle <u>intégrale de f sur $[a ; b]$</u> l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



3) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a\ ;\ b]$ se note : $\int_a^b f(x)\,dx$

Et on lit "intégrale de a à b de $f(x)dx$".

Cette notation est due au mathématicien allemand *Gottfried Wilhelm von Leibniz* (1646 ; 1716). Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégral est égal à une aire calculée comme somme infinie d'autres aires.
Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

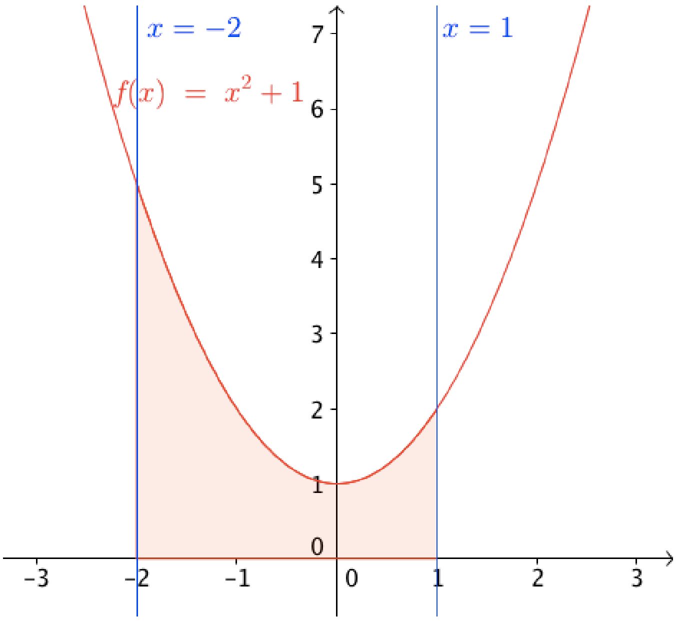
Remarques :
- a et b sont appelés les bornes d'intégration.
- x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas par ailleurs.

Ainsi on peut écrire : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

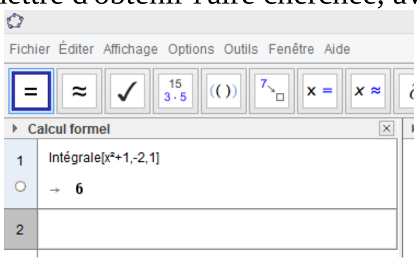
" dx " ou " dt " nous permet de reconnaître la variable d'intégration.

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2 + 1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$ et se note $\int_{-2}^{1} \left(x^2+1\right)dx$.



Un logiciel de calcul formel peut permettre d'obtenir l'aire cherchée, avec Géogébra par exemple :

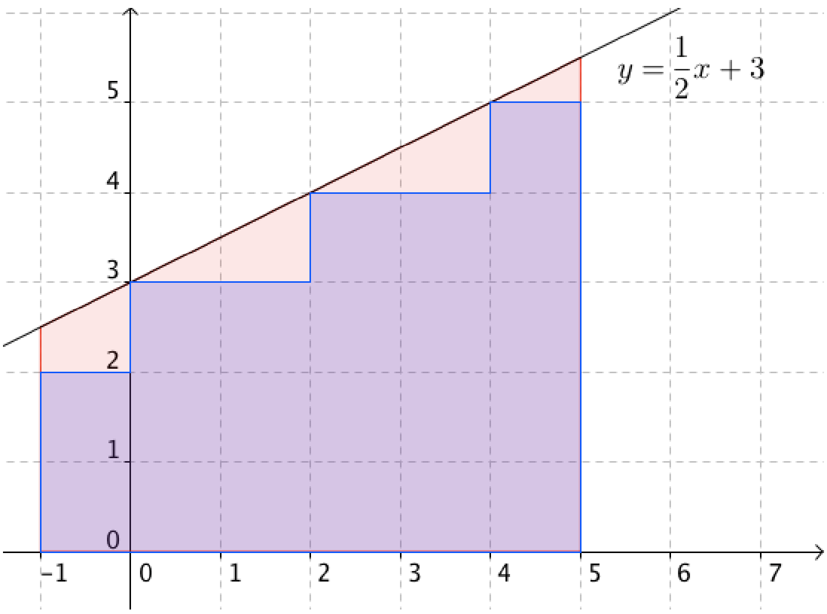


Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire

a) Tracer la représentation graphique de la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{1}{2}x+3$ dans un repère orthonormé.

b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$.

a)



b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ revient à calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=5$.

Donc par dénombrement, on obtient : $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = 21\,u.a.+3\,u.a.=24\,u.a.$

4) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive (voir TD)

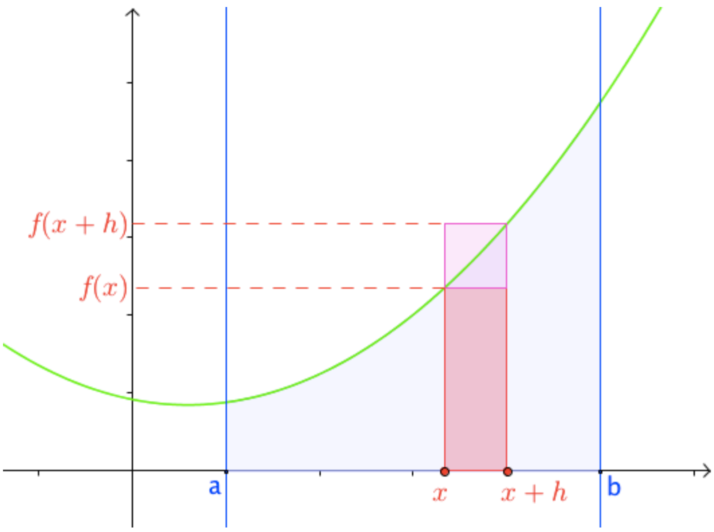
Soit une fonction *f* continue, positive et monotone sur un intervalle [*a* ; *b*].

On partage l'intervalle [*a* ; *b*] en *n* sous-intervalles de même amplitude $l=\dfrac{b-a}{n}$.

Sur un sous-intervalle $\left[x;x+l\right]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension *l* et $f(x)$ qui a pour aire *l* x $f(x)$;
- l'autre de dimension *l* et $f(x+h)$ qui a pour aire *l* x $f(x+h)$.

Sur l'intervalle [*a* ; *b*], l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des *n* rectangles "inférieurs" et la somme des *n* rectangles "supérieurs".



Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement.

Langage naturel
Entrée Saisir les réels a et b Saisir l'entier n **Initialisation** Affecter à L la valeur (b-a)/n Affecter à *x* la valeur a Affecter à m la valeur 0 Affecter à p la valeur 0 **Traitement des données** Pour i allant de 0 à n-1 Faire Affecter à m la valeur m + Lxf(*x*) Affecter à *x* la valeur *x* + L Affecter à p la valeur p + Lxf(*x*) **Sortie** Afficher m et p

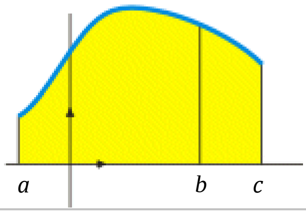
```
a=input("a=")
b=input("b=")
n=input("n=")
L=(b-a)/n
x=a
m=0
p=0
for i=0:(n-1)
    m=m+L*x^2
    x=x+L
    p=p+L*x^2
end
afficher(m)
afficher(p)
```

5) Propriétés (intuitives…)

Propriété 1 : Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a, b et c trois réels de I.

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$



Lorsque f est positive et $a \le b \le c$, la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

Propriété 2 : Linéarité de l'intégration

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

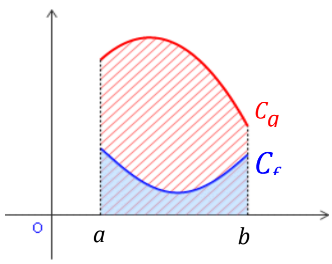
b) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Propriété 3 : Conservation de l'ordre

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \le b$.

a) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \ge 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

b) Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \ge g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$



→ Exercices 26 à 31 page 200

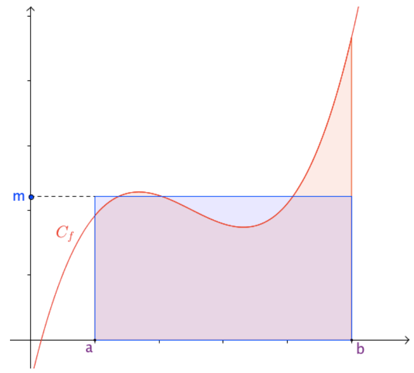
6) Valeur moyenne

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$ avec $a \neq b$.

On appelle <u>valeur moyenne</u> de f sur $[a\,;\,b]$ le nombre réel $m = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Interprétation géométrique :</u>
L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu).



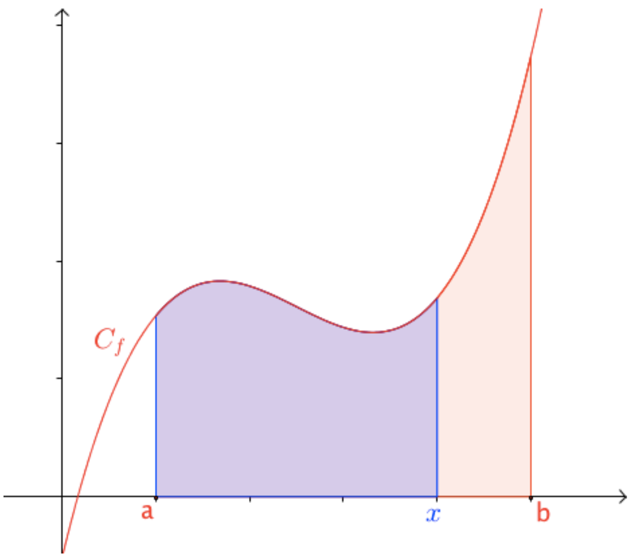
→ Exercices 32 et 33 page 200
→ Exercices 23 à 25 page 200

7) Fonction définie par une intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

La fonction F définie sur $[a\,;\,b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et sa dérivée est la fonction f.



<u>Démonstration dans le cas où f est strictement croissante :</u>
- On considère deux réels x et $x+h$ de l'intervalle $[a\,;\,b]$ avec $h > 0$.

On veut démontrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(\text{t})dt-\int_a^x f(\text{t})dt$.

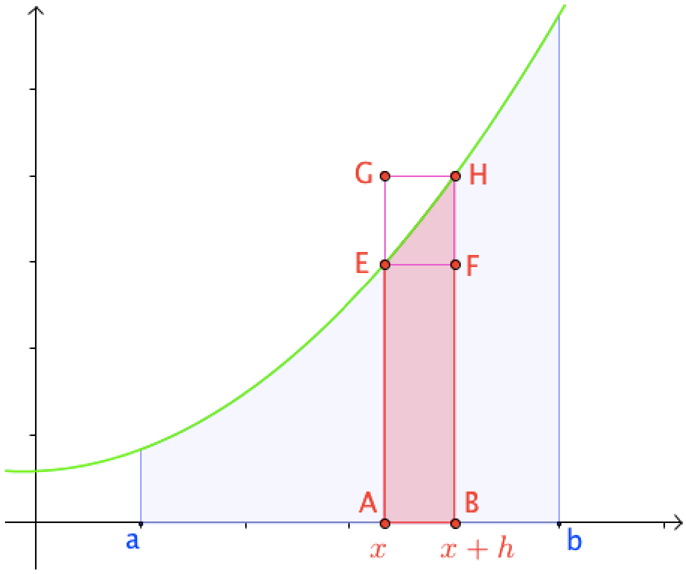
Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.

Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.

Or, $Aire(ABFE)=h\times f(x)$ et $Aire(ABHG)=h\times f(x+h)$.

Comme f est croissante sur $[a ; b]$, on a :
$h\times f(x)<F(x+h)-F(x)<h\times f(x+h)$

Puisque $h>0$, on a :
$f(x)<\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}<f(x+h)$.



Comme f est continue sur $[a ; b]$, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

- Dans le cas où $h<0$, la démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).
On en déduit que $F'(x)=f(x)$.

Méthode : Etudier une fonction définie par une intégrale

Soit F la fonction définie sur [0 ; 10] par $F(x)=\int_0^x \frac{t}{2}dt$.

a) Etudier les variations de F.
b) Tracer sa courbe représentative.

a) $x\mapsto\dfrac{x}{2}$ est continue et positive sur [0 ; 10] donc F est dérivable sur [0 ; 10] et $F'(x)=\dfrac{x}{2}>0$.

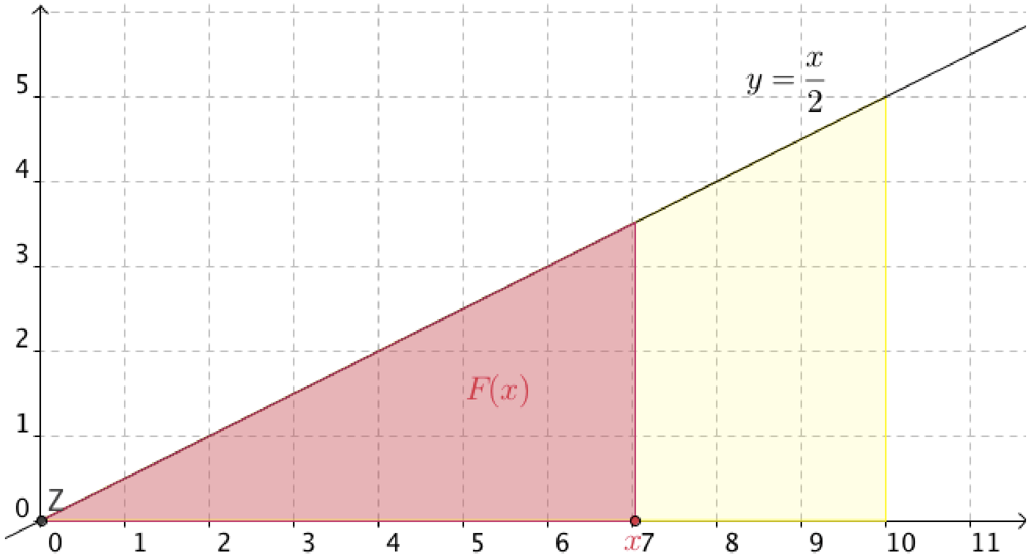
Donc F est croissante sur [0 ; 10].

On dresse le tableau de variations :

x	0	10
$F'(x)$	+	
$F(x)$	0	25

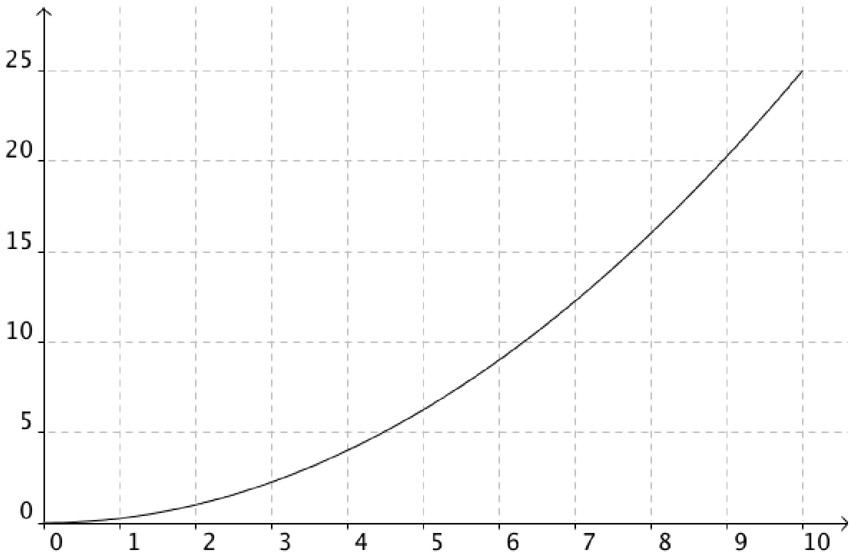
$F(x)$ est égal à l'aire du triangle rouge.

Ainsi $F(10)=\dfrac{10\times 5}{2}=25\,u.a.$



b) Pour tout x de [0 ; 10], on a $F(x) = \dfrac{x \times \dfrac{x}{2}}{2} = \dfrac{x^2}{4}$ *u.a.*

On a ainsi la représentation graphique de F :



II. Primitive d'une fonction continue

1) Définition et propriétés

Exemple :
On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$ et $F(x) = x^2 + 3x - 1$.
On constate que $F'(x) = 2x + 3 = f(x)$.
On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$

Remarque :
Dans ces conditions, on a l'équivalence :
« F a pour dérivée f » et « f a pour primitive F ».

Exemple :
$F(x) = x$ est une primitive de $f(x) = \frac{x^2}{2}$ car $f'(x) = F(x)$ pour tout réel x.

Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $x \longmapsto F(x) + C$ est une primitive de f sur I.

Démonstration :
F est une primitive de f.
On pose $G(x) = F(x) + C$.
$G'(x) = F'(x) + 0 = F'(x) = f(x)$.
Donc G est une primitive de f.

Exemple :
En reprenant l'exemple précédent, toute fonction de la forme $G_C(x) = x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, est une primitive de f.

Propriété (admise)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque : Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue.
Par exemple, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

2) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \geq 0$ entier	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n < -1$ entier	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x}$	$]0;+\infty[$

$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$	$\mathbb{R}$

3) Linéarité des primitives

Propriété

f et g sont deux fonctions continues sur $[a\,;\,b]$.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a\,;\,b]$ alors :
- $F + G$ est une primitive de $f + g$,
- kF est une primitive de kf avec k réel.

Démonstration :
- $(F+G)'=F'+G'=f+g$
- $(kF)'=kF'=kf$

4) Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n$ $n\neq -1$ entier	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$	Si $n<0, u(x)\neq 0$.
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x)>0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x)>0$
$u'e^u$	e^u	
$u'\cos u$	$\sin u$	
$u'\sin u$	$-\cos u$	

Méthode : Recherche de primitives

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x)=x^3-2x$ sur $I=\mathbb{R}$

b) $f(x)=xe^{x^2}$ sur $I=\mathbb{R}$

c) $f(x)=3x^2-\frac{3}{x^3}$ sur $I=]0;+\infty[$

d) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I=\mathbb{R}$

e) $f(x)=\cos(2x)-3\sin(3x-1)$ sur $I=\mathbb{R}$

f) $f(x)=\frac{3x}{x^2+2}$ sur $I=\mathbb{R}$

a) $F(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$

b) $f(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2}$ donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$

c) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3} = 3x^2 - 3x^{-3}$ donc $F(x) = x^3 - 3 \times \frac{1}{-2}x^{-2} = x^3 + \frac{3}{2x^2}$

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ donc $F(x) = \sqrt{x^2+1}$

e) $f(x) = \frac{1}{2} \times 2\cos(2x) - 3\sin(3x-1)$ donc $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \cos(3x-1)$

f) $f(x) = \frac{3}{2} \times \frac{2x}{x^2+2}$ donc $F(x) = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right)$

→ Exercices 4 à 7 page 189
→ Exercices 43 à 58 page 202