Durée : 4 heures

OBLIGATOIRE

et

SPÉCIALITÉ

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de cinq exercices indépendants. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L $^{-1}$), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.
Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t}$, avec $t \in [0; +\infty[$.
La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20$ μg.L $^{-1}$.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
   Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.
2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à 0,2μg.L $^{-1}$.
   Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

Partie B : administration par voie orale

On note g(t) la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (µg.L $^{-1}$), au bout de t heures après ingestion par voie orale.
Le modèle mathématique est : $g(t) = 20(\mathrm{e}^{-0,1t} - \mathrm{e}^{-t})$, avec $t \in [0; +\infty[$.
Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0$ μg.L $^{-1}$.

1. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, on a : $g'(t) = 20e^{-t}(1 - 0{,}1e^{0,9t})$
2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
   (On ne demande pas la limite en $+\infty$.)
   En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à - dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en ***A-1***.
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20 μg.L $^{-1}$.
On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 20$.
On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20μg.L $^{-1}$, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

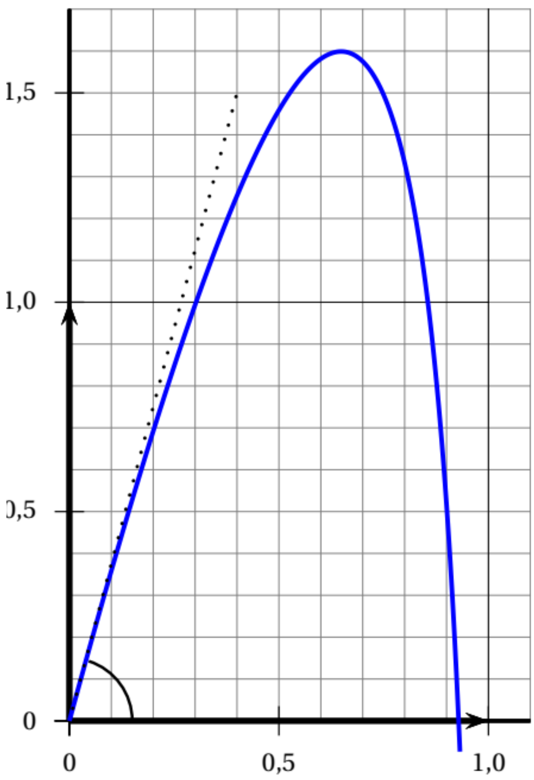
1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L $^{-1}$.
   Déterminer, algébriquement, le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

Exercice 2 (4 points)

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.
On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1[par:

$$f(x) = bx + 2\ln(1 - x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle [0 ; 1[.
On note f' sa fonction dérivée.
On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle [0 ; 1[et que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1[:

$$f'(x) = \frac{-bx + b - 2}{1 - x}$$

Montrer que le maximum de la fonction f est égal à :

$$b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$$

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

3. Dans cette question, on choisit $b = 5{,}69$.
L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

Exercice 3 (3 points)

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A - Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.
L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante:

- parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;
- parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

On choisit un client du magasin au hasard et on définit les évènements suivants :

B : « le client paye à une borne automatique » ;
$\overline{B}$: « le client paye à une caisse avec opérateur » ;
S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».

Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.
Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

Partie B - Bons d'achat
Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats.
Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10 € d'achats.
Par exemple, si le montant des achats est 58,64 €, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31 € , le client obtient 12 cartes.
Les cartes gagnantes représentent 0,5 % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 €.

Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?

2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10 € , la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?

Exercice 4 (3 points)

Partie A. Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Partie B
On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

1. Soit g la fonction définie sur $1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

Montrer que la fonction g est positive sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. ***a.*** Montrer que, pour tout x de $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

c. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C).

d. Étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

Exercice 5 - Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité (5 points)

Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = ln\,2$ et, pour tout entier naturel *n* non nul,

$$v_{n+1} = ln(2 - e^{-v_n})$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel *n* non nul.

On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel *n* non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de *Sn* pour une valeur de *n* choisie par l'utilisateur :

$v \leftarrow$ ...
$S \leftarrow$ ...
Pour k variant de ... à ... *faire*
    ... *prend la valeur* ...
    ... *prend la valeur* ...
Fin de Pour
... ...

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de *Sn*. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1000	10000	100000	1000000
Sn	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = e^{v_n}$.

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel *n* non nul, $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.

2. Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{n+1}{n}$.

Partie C – Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u^n , puis v_n en fonction de n.

2. Vérifier que $S_3 = ln(4)$.

3. Pour tout entier naturel *n* non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 5 – Spécialité uniquement (5 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A – Question de cours

L'objectif de cette partie consiste à démontrer le Corollaire de Bézout :
« a, b et c étant des entiers naturels, l'équation $ax + by = c$ admet des couples solutions d'entiers $(x\,;y)$ si, et seulement si, c est un multiple du $PGCD(a, b)$. »

1. Montrez que si l'équation $ax + by = c$ admet une solution $(x_0\,;\ y_0)$ alors $PGCD(a, b)$ divise c.

2. Soit c un multiple de PGCD(a, b).
   Montrer alors que l'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières.

3. Conclure.

Partie B

Pour deux entiers naturels non nuls *a* et *b*, on note *r*(*a*, *b*) le reste dans la division euclidienne de *a* par *b*.
On considère l'algorithme suivant :

$c \leftarrow r(a,b)$
$Tant\ que\ c \neq 0$
  $a \leftarrow b$
  $b \leftarrow c$
  $c \leftarrow r(a,b)$
$Fin\ de\ Tant\ que$

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de *a*, *b* et *c* à chaque étape.

2. Cet algorithme permet d'obtenir le PGCD des entiers naturels non nuls *a* et *b*.
   Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls *a* et *b* sont premiers entre eux ou non.

Partie C – Vrai ou Faux

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.
Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide on trouve $PGCD(4935\,; 517) = 5$,
   la dernière étape étant $240 = 5 \times 48 + 0$.

2. n est un entier relatif quelconque. On pose : $A = n - 1$ et $B = n^2 - 3n + 6$.
   Le PGCD de A et de B est égal au PGCD de A et de 4.

3. Le théorème de Bézout permet de prouver que la fraction $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ est irréductible pour tout entier naturel n.