Correction du DS n°3

Exercice 1 (5 points) (Centres étrangers Juin 2017)

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L $^{-1}$), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.
Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t}$, avec $t \in [0; +\infty[$.
La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20$ μg.L $^{-1}$.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.

On résout l'équation $f(t) = 10$:

$$f(t) = 10 \Leftrightarrow 20\mathrm{e}^{-0,1t} = 10 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,1t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0,1t = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{\ln\frac{1}{2}}{0,1} = \frac{\ln 2}{0,1} \approx \boxed{6,9}$$

La demi-vie est d'environ 6,9 h, soit 6 h 54 min.

2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à 0,2μg.L $^{-1}$.
Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

On résout alors l'inéquation $f(t) \leq 0,2$:

$$f(t) \leq 2 \Leftrightarrow 20\mathrm{e}^{-0,1t} \leq 0,2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,1t} \leq 0,01 \Leftrightarrow -0,1t \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow t \geq -\frac{\ln 0,01}{0,1} \boxed{\approx 46,1}.$$

Le médicament est éliminé au bout de 46,1 h (soit 46 h 06 min).

Partie B : administration par voie orale

On note g(t) la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (µg.L $^{-1}$), au bout de t heures après ingestion par voie orale.

Le modèle mathématique est : $g(t) = 20(\mathrm{e}^{-0,1t} - \mathrm{e}^{-t})$, avec $t \in [0; +\infty[$.
Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0$ μg.L $^{-1}$.

1. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, on a : $g'(t) = 20e^{-t}(1 - 0,1e^{0,9t})$

$g(t) = 20(\mathrm{e}^{-0,1t} - \mathrm{e}^{-t})$

On dérive : $g'(t) = 20 \times (-0,1\mathrm{e}^{-0,1t} - (-1)\mathrm{e}^{-t}) = 20(-0,1\mathrm{e}^{-0,1t} + \mathrm{e}^{-t}) = \boxed{20\mathrm{e}^{-t}(1 - 0,1\mathrm{e}^{0,9t})}$

2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
(On ne demande pas la limite en $+\infty$.)
En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

On étudie le signe de g' :

Quel que soit le réel t, $20\mathrm{e}^{-0,1t} > 0$ donc $g'(t)$ est du signe de $1 - 0{,}1\mathrm{e}^{0,9t}$.
$1 - 0{,}1\mathrm{e}^{0,9t} > 0 \Leftrightarrow 1 > 0{,}1\mathrm{e}^{0,9t} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0,9t} < \frac{1}{0{,}1} = 10 \Leftrightarrow 0{,}9t < \ln 10 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 10}{0{,}9} \approx 2{,}56.$
$g\left(\frac{\ln 10}{0{,}9}\right) \approx 13{,}94$
On en déduit le tableau de variation

x	0		$\frac{\ln 10}{0,9} \approx 2,56$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{\ln 10}{0,9}\right) \approx 13,94$	$\searrow$	

La durée après laquelle la concentration est maximale est $\frac{\ln 10}{0{,}9}$ h, soit environ 2,56 h.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à -dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en ***A-1***.
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20 μg.L $^{-1}$.
On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 20$.
On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20μg.L $^{-1}$, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.

(a) **Initialisation** : Pour $n = 1$, $40 - 40 \times 0,5^1 = 40 - 40 \times 0{,}5 = 40 - 20 = 20 = u_1$ donc la propriété est **vraie au rang $n = 1$**.
(b) **Hérédité** : on suppose que $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$ pour une valeur de n quelconque. Démontrons dans ce cas que $u_{n+1} = 40 - 40 \times 0{,}5^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0{,}5u_n + 20 \\ &= 0{,}5 \times (40 - 40 \times 0,5^n) + 20 \\ &= 20 - 40 \times 0{,}5 \times 0,5^n + 20 \\ &= 40 - 40 \times 0,5^{n+1} \end{aligned}$$

La propriété est **héréditaire**.
D'après l'axiome de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

$-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 40}$.

3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L- $^{-1}$. Déterminer, algébriquement, le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

On cherche l'entier n minimum tel que $u_n \geq 38$.

$$\begin{aligned} u_n \geq 38 &\Leftrightarrow 40 - 40 \times 0,5^n \geq 38 \\ &\Leftrightarrow -40 \times 0,5^n \geq -2 \\ &\Leftrightarrow 0,5^n \leq 0{,}05 \\ &\Leftrightarrow n\ln(0{,}5) \leq \ln(0{,}05) \end{aligned}$$

(en appliquant la fonction ln, croissante sur $]0; +\infty[$).
On obtient : $n \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}5)} \approx 4{,}3$ (en divisant par ln0,5 qui est négatif).
Il faut donc au **minimum 5 injections**.

Exercice 2 (4 points) Am du Nord Mai 2018

Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.
Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.
On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1[$ par:

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.

1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1[$. On note f' sa fonction dérivée.
On admet que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;1[$ et que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1[$:

$$f'(x) = \frac{-bx+b-2}{1-x}$$

Montrer que le maximum de la fonction f est égal à :

$$b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$$

Puisque la fonction f est dérivable, et que l'on connaît sa fonction dérivée, on va étudier le signe de la fonction dérivée pour connaître les variations de la fonction f.
Soit x dans $[0;1[$. On a $x < 1$ et donc, $0 < 1-x$.
Le dénominateur de $f'(x)$ étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff -bx+b-2 \geq 0 \\ &\iff b-2 \geq bx \\ &\iff x \leq \frac{b-2}{b} \quad car\ b > 2 \end{aligned}$$

On peut donc affirmer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{b-2}{b}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{b-2}{b};1\right[$.
Ces variations indiquent que f atteint un maximum pour $x = \frac{b-2}{b} = 1-\frac{2}{b}$.
Ce maximum est donc $f\left(1-\frac{2}{b}\right) = b \times \left(1-\frac{2}{b}\right) + 2\ln\left(1-\left(1-\frac{2}{b}\right)\right) = b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.
Le maximum de la fonction f s'établit bien à $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

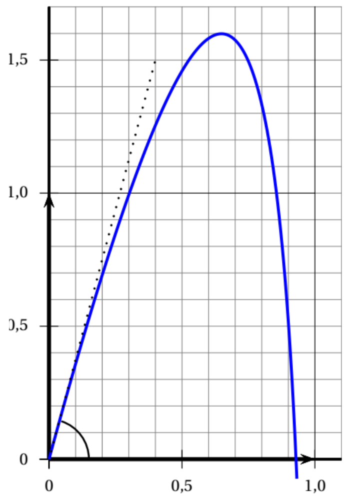
Si on essaye de résoudre l'inéquation $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right) \leq 1{,}6$, on se retrouve devant une équation que l'on ne sait pas résoudre de façon exacte.
On peut donc procéder à tâtons, par exploration à la calculatrice pour donner une réponse.
La méthode la plus complète serait la suivante :
Posons m la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $m(b) = b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right) = b-2+\ln(4)-2\ln(b)$.
La fonction m est dérivable sur son ensemble de définition et on a pour tout b supérieur à 2 : $m'(b) = 1-\frac{2}{b}$.
Comme b est supérieur à 2, on en déduit que $m'(b)$ est positif, et même strictement positif pour $b > 2$, et donc que la fonction m est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

$m(2) = 2-2+\ln 1 = 0$.

S'il y a un réel b_0 tel que $f(b_0) = 1{,}6$, on pourra donc dire que $2 \leq b \leq b_0 \iff 0 \leq m(b) \leq 1{,}6$.
Par exploration à la calculatrice, on constate (par exemple) que $m(10) \approx 4{,}8$.
La fonction m étant continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $[2;10]$ et 1,6 étant une valeur intermédiaire entre $m(0) = 0$ et $m(10) \approx 4{,}8$, le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires

permet d'affirmer qu'il existe un unique nombre b_0 antécédent de 1,6 par m sur $[2;10]$. Comme m est strictement croissante sur $[2;+\infty[$, il n'y aura pas d'autre antécédent que celui là .
Un balayage à la calculatrice donne $5{,}69 < b_0 < 5{,}70$.
Les valeurs du paramètre b garantissant une hauteur maximale $m(b)$ ne dépassant pas 1,6 mètre sont donc les réels de l'intervalle $[2;b_0]$, soit, en donnant une valeur approchée (nécessairement par défaut, vu que m est croissante) de l'intervalle $[2;5{,}69]$.

3. Dans cette question, on choisit $b = 5{,}69$.
L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.
Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.



Si on choisit $b = 5{,}69$, alors, cela signifie que la tangente tracée en pointillés est la droite d'équation :
$y = f'(0) \times (x-0) + f(0) = \frac{b-2}{1-0} \times x + 0 = (5{,}69-2)x = 3{,}69x$.
Cela signifie que l'origine du repère, le point de coordonnée $(1;0)$ et le point de coordonnées $(1;3{,}69)$ forment un triangle rectangle, dans lequel le côté opposé à l'angle θ mesure 3,69 et le côté adjacent mesure 1, donc la tangente de l'angle est donnée par $\tan\theta = \frac{3{,}69}{1} = 3{,}69$.
À la calculatrice (réglée en mode degrés), on obtient $\theta = \arctan(3{,}69) \approx 74{,}8°$.

Exercice 3 (3 points) Am du Nord Mai 2018

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A - Durée d'attente pour le paiement

Ce supermarché laisse le choix au client d'utiliser seul des bornes automatiques de paiement ou bien de passer par une caisse gérée par un opérateur.
L'étude commandée par le gérant conduit à la modélisation suivante:

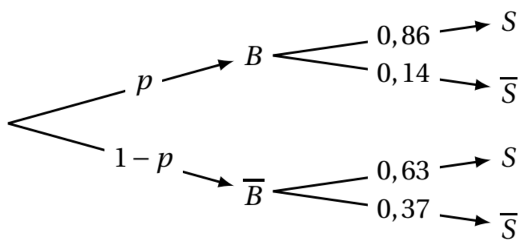
- parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, 86 % attendent moins de 10 minutes ;
- parmi les clients passant en caisse, 63 % attendent moins de 10 minutes.

On choisit un client du magasin au hasard et on définit les évènements suivants :

B : « le client paye à une borne automatique » ;
$\overline{B}$: « le client paye à une caisse avec opérateur » ;
S : « la durée d'attente du client lors du paiement est inférieure à 10 minutes ».

Une attente supérieure à dix minutes à une caisse avec opérateur ou à une borne automatique engendre chez le client une perception négative du magasin. Le gérant souhaite que plus de 75 % des clients attendent moins de 10 minutes.
Quelle est la proportion minimale de clients qui doivent choisir une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint ?

Puisque l'on choisit au hasard un client du magasin, on est en situation d'équiprobabilité et les proportions sont assimilables à des probabilités.
Notons p la proportion de clients choisissant les caisses automatiques. On peut alors visualiser la situation à l'aide de l'arbre suivant :



B et $\overline{B}$ formant une partition de l'univers, on utilise la loi des probabilités totales :

$$P(S) = P(S \cap B) + P(S \cap \overline{B}) = P(B) \times P_B(S) + P(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(S) = p \times 0{,}86 + (1 - p) \times 0{,}63$$

Finalement : $P(S) = 0{,}63 + p(0{,}86 - 0{,}63) = 0{,}63 + 0{,}23p$.

Pour que plus de 75 % des clients attendent moins de dix minutes, on doit avoir :

$$\begin{aligned} P(S) > 0{,}75 &\Leftrightarrow 0{,}63 + 0.23p > 0{,}75 \\ &\Leftrightarrow 0{,}23p > 0{,}12 \\ &\Leftrightarrow p > \frac{0{,}12}{0{,}23} \end{aligned}$$

La proportion minimale de clients devant choisir les caisses automatiques, si on veut que plus de 75 % des clients attendent moins de dix minutes est donc de $\frac{12}{23}$, soit environ 52,2 %.

Partie B - Bons d'achat

Lors du paiement, des cartes à gratter, gagnantes ou perdantes, sont distribuées aux clients. Le nombre de cartes distribuées dépend du montant des achats. Chaque client a droit à une carte à gratter par tranche de 10 d'achats.

Par exemple, si le montant des achats est 58,64 €, alors le client obtient 5 cartes ; si le montant est 124,31 € , le client obtient 12 cartes.

Les cartes gagnantes représentent 0,5 % de l'ensemble du stock de cartes. De plus, ce stock est suffisamment grand pour assimiler la distribution d'une carte à un tirage avec remise.

1. Un client effectue des achats pour un montant de 158,02 €.

Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il obtienne au moins une carte gagnante ?

Pour un montant de 158,02 €, le client obtient 15 cartes.

- Chaque carte peut être gagnante (considéré comme succès).
  Puisque la distribution d'une carte est assimilable à un tirage au sort dans le stock de cartes, on va assimiler la proportion de cartes gagnantes à la probabilité qu'une carte distribuée soit gagnante.
  La probabilité du succès est donc de $p = 0{,}005$.
- Le client reçoit 15 cartes.
  Puisque l'on dit que la distribution est assimilable à un tirage avec remise, la distribution des 15 cartes est considérée comme la répétition 15 fois de façon indépendante de la distribution d'une carte.
- On s'intéresse au nombre N de cartes gagnantes reçues par le client.
  Les éléments cités ci-dessus permettent de dire que la variable aléatoire N suit la loi binomiale de paramètres $\mathcal{B}(15; 0{,}005)$, et donc :
  $$P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - \binom{15}{0} 0{,}005^0 \times 0{,}995^{15} = 1 - 0{,}995^{15} \approx 0{,}072$$
  La probabilité que ce client ait au moins une carte gagnante est de 0,07, à 10^{-2} près.

2. À partir de quel montant d'achats, arrondi à 10 € , la probabilité d'obtenir au moins une carte gagnante est-elle supérieure à 50 % ?

La démarche va être similaire, sauf que le nombre de répétitions va être variable. Si on note n le nombre de cartes reçues, et que l'on considère N_n, la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et 0,005 alors on aura :

$$P(N_n \geq 1) = 1 - P(N_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} 0{,}005^0 \times 0{,}995^n = 1 - 0{,}995^n$$

Résolvons :

$$P(N_n \geq 1) \geq 0{,}50 \iff 1 - 0{,}995^n \geq 0{,}5$$
$$\iff -0{,}995^n \geq -0{,}5$$
$$\iff 9{,}995^n \leq 0{,}5$$
$$\iff n\ln(0{,}995) \leq \ln(0{,}5) \text{ car la fonction } \mathit{ln} \text{ est croissante sur } [0\,;\,+\infty[$$
$$\iff n \geq \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}995)} \text{ car } \ln(0{,}995) \text{ est négatif.}$$

Comme $\frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}995)} \approx 138{,}3$ et que n doit être entier, il faut avoir $n \geq 139$, et c'est donc à partir de 1390 € que la probabilité d'avoir au moins une carte gagnante dépasse 0,5.

Exercice 4 (3 points) Am du Nord Mai 2012

Partie A. Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

On effectue un changement de variable, en possant $X = \ln(x)$; alors $x = \mathrm{e}^X$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, X tend aussi vers $+\infty$.
Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(\frac{X}{\mathrm{e}^X}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X}}\right) = 0$ d'après le rappel.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$.

1. Soit g la fonction définie sur $1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;\,+\infty[$.

Méthode 1 :
Pour tout $x \geq 1$, $x^2 \geq 1$ donc $x^2 - 1 \geq 0$.
De plus, toujours pour $x \geq 1$, $\ln x \geq 0$.
Par conséquent, $g(x) = x^2 - 1 + \ln x \geq 0$ sur $[1;+\infty[$.

Méthode 2 :
Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
g est dérivable sur $[1;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in [1;+\infty[$, $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ (somme de nombres positifs).
g est donc croissante sur $[1;+\infty[$.
$g(1) = 0$.
Le tableau de variation de g est donc :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Le minimum de g est 0, donc $g(x)$ est positif pour tout $x \in [1;+\infty[$.

2. ***a.*** Montrer que, pour tout x de $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

f est dérivable sur $[1;+\infty[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables sur $[1;+\infty[$.
Pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f'(x) = 1 - \left[\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)}{x^2}\right] = 1 - \frac{1-\ln(x)}{x^2} = \frac{x^2-1+\ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ donc $\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}$.

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Comme $x^2 > 0$ sur $[1;+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, donc positif sur $[1;+\infty[$ avec $f'(1) = 0$.

Par conséquent f est strictement croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

c. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C).

Pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f(x) - x = -\frac{\ln(x)}{x}$.
D'après la partie A, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$.
La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est donc asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

d. Étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

Pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f(x) - x = -\frac{\ln(x)}{x} \leq 0$ car $\ln(x) \geq 0$ et $x > 0$.

La courbe $\mathcal{C}$ est donc en dessous de son asymptote $\mathcal{D}$ (avec intersection en $x = 1$).

Exercice 5 - Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité (5 points)

Polynésie Juin 2015

Soit (v_n) la suite définie par $v_1 = ln\,2$ et, pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = ln(2 - e^{-v_n})$.

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul. On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

$v \leftarrow \ln 2$
$S \leftarrow v$
Pour k variant de 2 à n *faire*
  v *prend la valeur* $\ln(2 - \mathrm{e}^{v_n})$
  S *prend la valeur* $S + v$
Fin de Pour

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1000	10000	100000	1000000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

D'après les valeurs affichées il semble que la suite (S_n) soit croissante.

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = e^{v_n}$.

1. Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$.

On a $u_1 = \mathrm{e}^{v_1} = \mathrm{e}^{\ln(2)} = 2$.
Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \mathrm{e}^{v_{n+1}} = \mathrm{e}^{\ln(2-\mathrm{e}^{-v_n})} = (2 - \mathrm{e}^{-v_n}) = 2 - \frac{1}{\mathrm{e}^{v_n}} = 2 - \frac{1}{u_n}$$

2. Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

$$u_2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad ; \quad u_3 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \quad ; \quad u_4 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{n+1}{n}$.

Initialisation : la relation est vraie pour $n = 4$;

Hérédité : Supposons qu'il existe un naturel $p > 4$ tel que $u_p = \frac{p+1}{p}$.

On a $u_{p+1} = 2 - \frac{1}{u_p} = 2 - \frac{p}{p+1} = \frac{2p+2-p}{p+1} = \frac{p+2}{p+1}$: la relation est donc vraie au rang $p + 1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{n+1}{n}$.

Partie C – Étude de (S_n)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u^n , puis v_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \mathrm{e}^{v_n} \Leftrightarrow v_n = \ln u_n$.

De la question précédente on peut écrire : $v_n = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$.

2. Vérifier que $S_3 = ln(4)$.

$S_3 = v_1 + v_2 + v_3 = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

$$\begin{aligned} S_n &= v_1 + v_2 + \cdots + v_n \\ &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \cdots + \ln n - \ln(n+1) + \ln(n+1) - \ln n \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

On a $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$. La suite (S_n) est divergente.

Exercice 5 – Spécialité uniquement (5 points)

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A – Question de cours

L'objectif de cette partie consiste à démontrer le Corollaire de Bézout :
« a, b et c étant des entiers naturels, l'équation $ax + by = c$ admet des couples solutions d'entiers $(x\,;y)$ si, et seulement si, c est un multiple du $PGCD(a, b)$. »

1. Montrez que si l'équation $ax + by = c$ admet une solution $(x_0\,;\ y_0)$ alors $PGCD(a, b)$ divise c.

Supposons que l'équation $ax + by = c$ admette une solution $(x_0\,;\ y_0)$.
Soit $D = PGCD(a, b)$ alors, comme D divise a et b, il divise $ax_0 + by_0$.
D divise donc c.

2. Soit c un multiple de $\text{PGCD}(a, b)$.
Montrer alors que l'équation $ax + by = c$ admet des solutions entières.

Soit c un multiple de $D = \text{PGCD}(a, b)$.

Donc il existe un entier relatif k tel que : $c = kD$.

De l'égalité de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = D$.

En multipliant par k, on obtient : $auk + bvk = kD \iff a(uk) + b(vk) = c$.

Donc il existe $x_0 = uk$ et $y_0 = vk$ tels que $ax_0 + by_0 = c$.

3. Conclure.

Partie B – Ant Guy Juin 2015

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r(a, b)$ le reste dans la division euclidienne de a par b.
On considère l'algorithme suivant :

$c \leftarrow r(a, b)$
$Tant\ que\ c \neq 0$
  $a \leftarrow b$
  $b \leftarrow c$
  $c \leftarrow r(a, b)$
$Fin\ de\ Tant\ que$

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.

valeur de a	26	9	8
valeur de b	9	8	1
valeur de c	8	1	0
Affichage			1

2. Cet algorithme permet d'obtenir le PGCD des entiers naturels non nuls a et b.
Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

$c \leftarrow r(a,b)$
$Tant\ que\ c \neq 0$
$\quad a \leftarrow b$
$\quad b \leftarrow c$
$\quad c \leftarrow r(a,b)$
$Fin\ de\ Tant\ que$
$Si\ b = 1\ alors$
$\quad Afficher$ "Les nombres sont premiers entre eux"
$\quad Sinon$
$\quad Afficher$ "Les nombres ne sont pas premiers entre eux"
$Fin\ de\ Si$

Partie C – Vrai ou Faux

Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.
Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. À l'aide de l'algorithme d'Euclide on trouve $PGCD(4935\,;517) = 5$,
la dernière étape étant $240 = 5 \times 48 + 0$.

$$4935 = 9 \times 517 + 282$$
$$517 = 1 \times 282 + 235$$
$$282 = 1 \times 235 + 47$$
$$235 = 5 \times 47 + 0$$

Donc l'affirmation est fausse.

2. n est un entier relatif quelconque. On pose : $A = n - 1$ et $B = n^2 - 3n + 6$.
Le PGCD de A et de B est égal au PGCD de A et de 4.

$$n^2 - 3n + 6 = (n-1)(n-2) + 4$$

Ce qui peut s'écrire

$$B = (n-2) \times A + 4$$

D'après l'algorithme d'Euclide, $PGCD(A\,;B) = PGCD(A\,;4)$.
L'affirmation est donc vraie.

3. Le théorème de Bézout permet de prouver que la fraction $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ est irréductible pour tout entier naturel n non nul.

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$
$$4 \times n(n+1) = 4n^2 + 4n$$
$$Donc\ \underbrace{(2n+1)}_{u} \times (2n+1) \underbrace{-4}_{v} \times n(n+1) = 1$$

Il existe donc un couple d'entier $(u\,;v)$ tel que $(2n+1) \times u + n(n+1) \times v = 1$
Ce qui prouve, d'après le théorème de Bézout, que $(2n+1)$ et $n(n+1)$ sont premiers entre eux et par conséquent, la fraction $\frac{2n+1}{n(n+1)}$ est irréductible pour tout entier naturel n.
La proposition est vraie.