Durée : 4 heures

OBLIGATOIRE

et

SPÉCIALITÉ

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (6 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-4} - 2.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.

3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée.
Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g.

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

6. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie B : Étude de la fonction *f*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x^2\mathrm{e}^{x-4}.$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
On admet par ailleurs que, pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0; +\infty[$ est égal à $\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Partie C : Aire d'un domaine

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

1. Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{P}$.

2. On admet qu'une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^{x-4}.$$

Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en unité d'aire. On donnera la valeur exacte.

Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué 1 *point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

Pour les questions 1 à 3, on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe z

$$z(z^2 - 8z + 32) = 0$$

Affirmation 1 : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points dont les affixes z vérifient

$$|z - 3| = |z + 3|$$

Affirmation 2 : L'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

3. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$z_n = \left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n.$$

Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n, les points M_n O et M_{n+3} sont alignés.

4. On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x

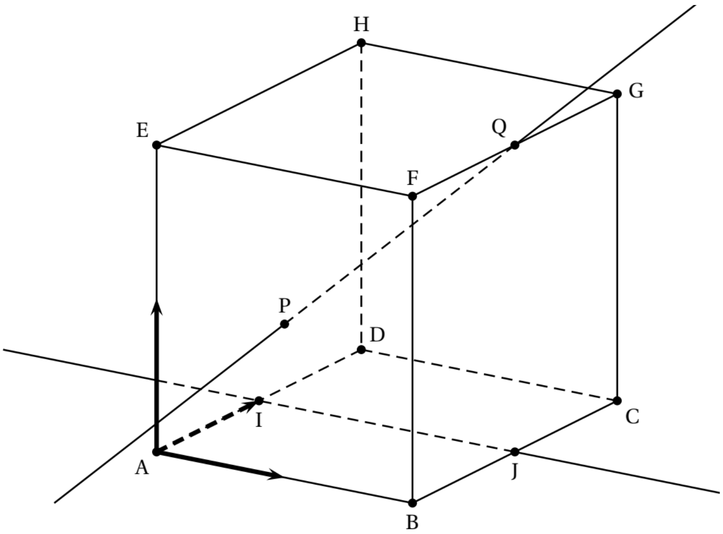
$$\sin(x)(2\cos^2(x) - 1) = 0.$$

Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$ qui sont : $-\frac{\pi}{4}$; 0 ; $\frac{\pi}{4}$ et π.

Exercice 3 (5 points)

Soit ABCDEFGH le cube représenté ci-dessous.

- I et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC];
- P le centre de la face ABFE, c'est-à -dire l'intersection des diagonales (AF) et (BE);
- Q le milieu du segment [FG].



On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ,\ \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\ ,\ \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.
Dans tout l'exercice, on pourra utiliser les coordonnées des points de la figure sans les justifier.

On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est

$$\begin{cases} x = r \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad r \in R$$

1. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t' \end{cases} \qquad t \in R$$

Soient t un nombre réel et M $(1 + t; t; 1 + t)$ le point de la droite (PQ) de paramètre t.

2. (a) On admet qu'il existe un unique point K appartenant à la droite (IJ) tel que (MK) soit orthogonale à (IJ).
Démontrer que les coordonnées de ce point K sont $(1 + t; 1; 0)$.
(b) En déduire que MK $= \sqrt{2 + 2t^2}$.

3. (a) Vérifier que $y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (HGB).
(b) On admet qu'il existe un unique point L appartenant au plan (HGB) tel que (ML) soit orthogonale à (HGB).
Vérifier que les coordonnées de ce point L sont $\left(1 + t; \frac{1}{2} + t; \frac{1}{2} + t\right)$.
(c) En déduire que la distance ML est indépendante de t.

4. Existe-t-il une valeur de t pour laquelle la distance MK est égale à la distance ML?

Exercice 4 - Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité (5 points)

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}.$$

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,11111111
4	2	0,01369863
5	3	0,0017094
6	4	0,00021363
7	5	2,6703E−05
8	6	3,3379E−06
9	7	4,1723E−07
10	8	5,2154E−08
11	9	6,5193E−09
12	10	8,1491E−10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?
2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?
3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?
4. Écrire un algorithme calculant u_{30}.

Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n,

$$v_n = 1 + \frac{7}{u_n}.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. Déterminer la limite de la suite (u_n)
4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$.
Justifier l'existence d'un tel entier n_0 et déterminer sa valeur.

Exercice 5 – Spécialité uniquement (5 points)

Pour tout entier naturel n , on note F_n le n-ième nombre de Fermat. Il est défini par

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Partie A :
Pierre de Fermat, leur inventeur, a conjecturé que :

« Tous les nombres de Fermat sont premiers » ,

L'objectif est de tester cette conjecture.

1. (a) Calculer F_0, F_1, F_2 et F_3.
(b) Peut-on en déduire que tous les nombres de Fermat sont premiers ?

2. On considère l'algorithme ci-dessous:

$F \leftarrow 2^{2^5} + 1$
$N \leftarrow 2$
Tant que $F\%N \neq 0$
    $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que
Afficher N

$F\%N$ désigne le reste de la division euclidienne de F par N.

La valeur affichée à la fin de l'exécution est 641.
Que peut-on en déduire ?

Partie B :
L'objectif est de prouver que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$$

2. Pour tout entier naturel n on note :

$$\prod_{i=0}^{n} F_i = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_{n-1} \times F_n.$$

On a donc $\prod_{i=0}^{n} F_i = \left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right) \times F_n$.
Montrer par récurrence et en utilisant le résultat de la question précédente que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2.$$

3. Justifier que, pour tous entiers naturels n et m tels que $n > m$, il existe un entier naturel q tel que :

$$F_n - qF_m = 2$$

4. En déduire que deux nombres de Fermat sont toujours premiers entre eux.