Terminale S3	Corrigé du DS n°4 de Mathématiques	*le 26/04/2019*

Exercice 1 (6 points) Nlle Calédonie Mars 2019

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-4} - 2$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x-4} = +\infty$, donc par produit de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.

On a $g(x) = x\mathrm{e}^{x-4} + 2\mathrm{e}^{x-4} - 2 = x\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-4} + 2\mathrm{e}^{x-4} - 2$.

On sait que

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$; donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-4}x\mathrm{e}^{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x-4} = 0$,

donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -2$

3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée.
Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g.

$g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{x-4} + (x+2) \times 1 \times \mathrm{e}^{x-4} = \mathrm{e}^{x-4}(1 + x + 2) = \mathrm{e}^{x-4}(x+3)$.

On sait que quel soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x-4} > 0$; le signe de $g'(x)$ est donc celui de $x+3$ qui s'annule pour $x = -3$ est positif pour $x > -3$ et négatif pour $x < -3$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	↘	$\approx -2{,}001$	↗	$+\infty$

On a $g(-3) = (-3+2)\mathrm{e}^{-3-4} - 2 = -\mathrm{e}^{-7} - 2 \approx -2{,}001$.

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

D'après le tableau de variations :

- sur l'intervalle $]-\infty\,;-3[$, $f(x) < 0$ donc f ne s'annule pas sur cet intervalle
- sur l'intervalle $]-3;+\infty[$, $f(-3) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
  La fonction g étant continue sur cet intervalle car dérivable sur ce même intervalle ; il existe donc, d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, un réel unique α, $\alpha \in]-3;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Conclusion :

- $g(\alpha) = 0$;
- sur $]-\infty;\alpha[$, $g(x) < 0$; sur $]\alpha;+\infty[$, $g(x) > 0$

6. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

La calculatrice donne $g(3{,}069) \approx -0{,}002006$ et $g(3{,}070) \approx 0{,}00038$, donc :

$$3{,}069 < \alpha < 3{,}070$$

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - x^2\mathrm{e}^{x-4}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x^2\mathrm{e}^{x-4} = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - \mathrm{e}^{x-4}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{x-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1 = \mathrm{e}^{x-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0 = x - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4 = x \end{cases}$$

L'équation a deux solutions : 0 et 4.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
On admet par ailleurs que, pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

De la question 5 de la partie A on déduit que :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
Signe de g		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $(-x)$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Signe de $-xg(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La fonction est donc croissante sur $[0; \alpha[$ et décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]\alpha; +\infty[$.

3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0; +\infty[$ est égal à $\frac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

D'après la question précédente sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction est croissante puis décroissante : $f(\alpha)$ est donc le maximum de la fonction sur cet intervalle.
On a vu à la question **A. 3.** que α est le réel tel que :

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2)\mathrm{e}^{\alpha-4} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2)\mathrm{e}^{\alpha-4} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\alpha-4} = \frac{2}{\alpha + 2}$$

$$\text{Donc } f(\alpha) = \alpha^2(1 - e^{\alpha-4}) = \alpha^2\left(1 - \frac{2}{\alpha + 2}\right) = \alpha^2\left(\frac{\alpha + 2 - 2}{\alpha + 2}\right) = \alpha^2 \times \frac{\alpha}{\alpha + 2}.$$

$$\text{Finalement } f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\alpha + 2} \approx 5{,}71$$

Partie C : Aire d'un domaine

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on note $\mathcal{D}$ le domaine compris entre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f, la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.

1. Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{P}$.

Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$d(x) = x^2 - f(x) = x^2 - (x^2 - x^2\mathrm{e}^{x-4}) = x^2\mathrm{e}^{x-4}$$

Cette fonction produit de deux fonctions positives est positive et ne s'annule que pour $x = 0$.
Finalement, pour tout réel x, $x^2 - f(x) > 0$ donc la parabole $\mathcal{P}$ et au dessus de $\mathcal{C}_f$.

2. Géométriquement ceci montre que la parabole $\mathcal{P}$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$, le seul point commun étant l'origine.On admet qu'une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^{x-4}.$$

Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en unité d'aire. On donnera la valeur exacte.

On a vu à la question précédente que sur l'intervalle [0 ; 4] la courbe $\mathcal{P}$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$, donc l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathcal{P}$, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 4$, est en unité d'aire égale à l'intégrale :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^4 \left(x^2 - f(x)\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - F(x)\right]_0^4 \\ &= \left[\frac{4^3}{3} - \left(\frac{4^3}{3} - (4^2 - 2\times 4 + 2)\mathrm{e}^{4-4}\right)\right] - \left[0 - (0 - 2\mathrm{e}^{0-4})\right] = 10 - 2\mathrm{e}^{-4} \text{ (u. a.)}\end{aligned}$$

Exercice 2 (4 points) Nlle Calédonie Mars 2019

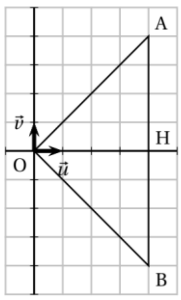
Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué 1 point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.
Pour les questions 1 à 3, on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe z : $z(z^2 - 8z + 32) = 0$

Affirmation 1 : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $z(z^2 - 8z + 32) = 0$.

- $z = 0$ ou
- $z^2 - 8z + 32 = 0$; $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 32 = -64 = -8^2$



Cette équation a donc deux solutions

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{8 + 8\,i}{2} = 4 + 4\,i \quad \text{et} \quad z_2 = 4 - 4\,i\,.$$

Soient A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
Le triangle OAB est isocèle en O et a pour aire $\mathcal{A} = \frac{\text{OH}\times\text{AB}}{2}$ où H est le milieu de [AB].
Le point H a pour affixe $\frac{z_1+z_2}{2} = 4$ donc OH $= 4$.
AB $= |(4 + 4\,\text{i}) - (4 - 4\,\text{i})| = |8\,\text{i}| = 8$; donc $\mathcal{A} = \frac{4\times 8}{2} = 16$.

Affirmation 1 vraie

2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points dont les affixes z vérifient : $|z-3| = |z+3|$

Affirmation 2 : L'ensemble $\mathcal{E}$ est le cercle de centre O et de rayon 3.

Soient M, A et B les points d'affixes respectives z, 3 et -3.

$$|z-3| = MA \quad et \quad |z+3| = MB \; ; \; donc \quad |z-3| = |z+3| \Leftrightarrow MA = MB.$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc une droite, la médiatrice de [AB].

Affirmation 2 fausse

3. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$z_n = \left(1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n.$$

Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel n, les points M_n O et M_{n+3} sont alignés.

Méthode 1 : colinéarité de vecteurs

Les points M_n ,O et M_{n+3} sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OM_{n+3}}$ sont colinéaires.

On a $\overrightarrow{OM_n}(z_n)$ et $\overrightarrow{OM_{n+3}}(z_{n+3})$.

$$z_{n+3} = \left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{n+3} = \left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n = -8\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n = -8z_n$$

On a donc $\overrightarrow{OM_{n+3}} = -8\ \overrightarrow{OM_n}$ ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{OM_n}$ et $\overrightarrow{OM_{n+3}}$ sont colinéaires et par conséquent que les points M_n ,O et M_{n+3} sont alignés.

Méthode 2 : avec les angles

On sait que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_{n+3}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}_n}\right) = \arg\left(\frac{z_{\mathrm{M}_{n+3}} - z_{\mathrm{O}}}{z_{\mathrm{M}_n} - z_{\mathrm{O}}}\right)$

donc $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_{n+3}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}_n}\right) = \arg\left(\frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{n+3}}{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^n}\right) = \arg\left(\left(1+\ \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3\right) = \arg(-8) = \pi \quad [2\pi].$

On en déduit que les trois points M $_n$, O et M $_{n+3}$ sont alignés.

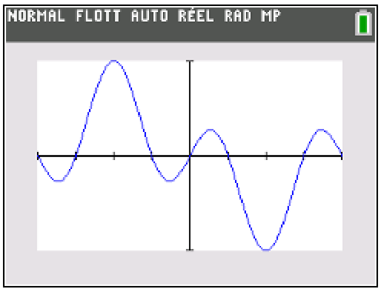
Affirmation 3 vraie

4. On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x

$$\sin(x)(2\cos^2(x) - 1) = 0.$$

Affirmation 4 : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ qui sont : $-\frac{\pi}{4}$; 0 ; $\frac{\pi}{4}$ et π.

Ci-contre, la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \sin(x)(2\cos^2 x - 1)$ sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ (graduation $\frac{\pi}{4}$ sur l'axe des abscisses).

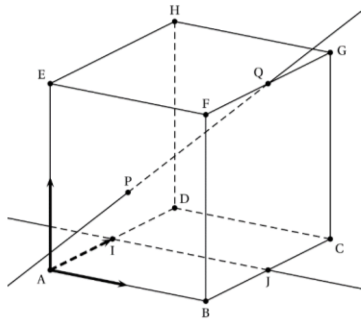


$\frac{3\pi}{4} \in]-\pi;\pi]$; or $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 1 = 0$.

On en déduit que $\frac{3\pi}{4}$ est une solution de l'équation mais ce n'est pas une des quatre solutions proposées.

Affirmation 4 fausse

Exercice 3 (5 points) Nlle Calédonie Nov 2018



Soit ABCDEFGH le cube représenté ci-dessous.

- I et J les milieux respectifs des segments [AD] et [BC];
- P le centre de la face ABFE, c'est-à -dire l'intersection des diagonales (AF) et (BE);
- Q le milieu du segment [FG].

On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ,\ \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\ ,\ \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

Dans tout l'exercice, on pourra utiliser les coordonnées des points de la figure sans les justifier.

On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (IJ) est $\begin{cases} x = r \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad r \in R$

1. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t' \end{cases} \quad t \in R$

La droite (PQ) est l'ensemble des points $\mathrm{M}(x; y; z)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ et $\overrightarrow{PQ}$ soient colinéaires, c'est-à -dire tels que $\overrightarrow{\mathrm{PM}} = t.\overrightarrow{PQ}$ avec $t \in R$.

$\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ a pour coordonnées $(x - 1\,;\ y\ ; z - 1)$ et $\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $(2 - 1; 1 - 0; 2 - 1) = (1; 1; 1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = t.\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 & = t \times 1 \\ y & = t \times 1 \\ z - 1 & = t \times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = & 1 + t \\ y = & t \\ z = & 1 + t \end{cases}$$

La droite (PQ) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = & 1 + t \\ y = & t \\ z = & 1 + t \end{cases} \quad , \quad t \in R.$

Soient t un nombre réel et M $(1 + t; t; 1 + t)$ le point de la droite (PQ) de paramètre t.

2. (a) On admet qu'il existe un unique point K appartenant à la droite (IJ) tel que (MK) soit orthogonale à (IJ).
Démontrer que les coordonnées de ce point K sont $(1 + t; 1; 0)$.

Le point K appartient à la droite (IJ) dont on connait une représentation paramétrique donc les coordonnées de K sont de la forme $(r; 1; 0)$.

Les droites (IJ) et (MK) sont orthogonales donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{MK}$ sont orthogonaux; leur produit scalaire est donc nul.

$\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $(2 - 0; 1 - 1; 0 - 0) = (2; 0; 0)$, et $\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $(x_{\mathrm{K}} - x_{\mathrm{M}}; y_{\mathrm{K}} - y_{\mathrm{M}}; z_{\mathrm{K}} - z_{\mathrm{M}}) = (r - 1 - t; 1 - t; -1 - t)$.

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{MK} = 0 \Leftrightarrow 2(r - 1 - t) + 0(1 - t) + 0(-1 - t) = 0 \Leftrightarrow r = 1 + t$$

Le point K a donc pour coordonnées $(1 + t\,; 1\,; 0)$.

(b) En déduire que $\mathrm{MK} = \sqrt{2 + 2t^2}$.

D'après la question précédente, le vecteur $\overrightarrow{MK}$ a pour coordonnées $(0; 1 - t; -1 - t)$ donc

$$\mathrm{MK} = \sqrt{0^2 + (1 - t)^2 + (-1 - t)^2} = \sqrt{1 - 2t + t^2 + 1 + 2t + t^2} = \sqrt{2 + 2t^2}$$

3. (a) Vérifier que $y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (HGB).

Les trois points H, G et B ne sont pas alignés donc ils définissent le plan (HGB).

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $y - z = 0$.

- $y_{\mathrm{H}} - z_{\mathrm{H}} = 2 - 2 = 0$ donc le point H appartient au plan $\mathcal{P}$.
- $y_{\mathrm{G}} - z_{\mathrm{G}} = 2 - 2 = 0$ donc le point G appartient au plan $\mathcal{P}$.
- $y_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{B}} = 0 - 0 = 0$ donc le point B appartient au plan $\mathcal{P}$.

Le plan $\mathcal{P}$ est donc le plan (HGB) ce qui veut dire que le plan (HGB) a pour équation cartésienne $y - z = 0$.

(b) On admet qu'il existe un unique point L appartenant au plan (HGB) tel que (ML) soit orthogonale à (HGB).
Vérifier que les coordonnées de ce point L sont $\left(1+t; \frac{1}{2}+t; \frac{1}{2}+t\right)$.

* $y_{\mathrm{L}} - z_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} + t - \left(\frac{1}{2}+t\right) = 0$ donc L ∈ (HGB).
* Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{ML}}$ a pour coordonnées $\left(1+t-(1+t); \frac{1}{2}+t-t; \frac{1}{2}+t-(1+t)\right) = \left(0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.
* Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{HG}}$ a pour coordonnées $(2-0; 2-2; 2-2) = (2; 0; 0)$.
  $\overrightarrow{\mathrm{ML}}.\overrightarrow{\mathrm{HG}} = 0 \times 2 + \frac{1}{2} \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{ML}} \perp \overrightarrow{\mathrm{HG}}$.
* Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ a pour coordonnées $(2-0; 0-2; 0-2) = (2; -2; -2)$.
  $\overrightarrow{\mathrm{ML}}.\overrightarrow{\mathrm{HB}} = 0 \times 2 + \frac{1}{2} \times (-2) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2 = 0 - 1 + 1 = 0$ donc $\overrightarrow{\mathrm{ML}} \perp \overrightarrow{\mathrm{HB}}$.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{ML}}$ est orthogonal à deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{HG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ non colinéaires, donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{ML}}$ est orthogonal au plan (HGB).
Si L a pour coordonnées $\left(1+t; \frac{1}{2}+t; \frac{1}{2}+t\right)$, alors L appartient au plan (HGB) et la droite (ML) est orthogonale au plan (HGB).

(c) En déduire que la distance ML est indépendante de t.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{ML}}$ a pour coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; ces coordonnées ne dépendent pas de t donc la distance ML ne dépend pas de t.

$$\mathrm{ML} = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4. Existe-t-il une valeur de t pour laquelle la distance MK est égale à la distance ML?

La distance MK est égale à ML si et seulement si $\sqrt{2+2t^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ce qui équivaut à $2 + 2t^2 = \frac{1}{2}$ ou encore $2t^2 = -\frac{3}{2}$.
L'équation $2t^2 = -\frac{3}{2}$ n'a pas de solution donc il n'existe pas de valeur de t pour laquelle les distances MK et ML sont égales.

Exercice 4 - Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité (5 points)

On considère la suite (u_n) à valeurs réelles définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}$.

Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite (u_n) ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,11111111
4	2	0,01369863
5	3	0,0017094
6	4	0,00021363
7	5	2,6703E−05
8	6	3,3379E−06
9	7	4,1723E−07
10	8	5,2154E−08

11	9	6,5193E−09
12	10	8,1491E−10

1. Quelle formule peut-on entrer dans la cellule B3 et copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) ?

La formule à entrer dans la cellule B3 et à copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) est = B2 / (B2 + 8)

2. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?

La suite (u_n) semble décroissante.

3. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (u_n) ?

La suite (u_n) semble converger vers 0.

4. Écrire un algorithme calculant u_{30}.

$Pour\ i\ allant\ de$ 1 à 30

$$u \leftarrow \frac{u}{u+8}$$

$Fin\ Pour$

$Afficher\ u$

Partie B : Étude générale

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
   - Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1 > 0$; donc la propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie pour un rang n quelconque, c'est-à -dire que $u_n > 0$.
   $$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}$$
   Or $u_n > 0$ donc $u_n + 8 > 0$ donc $\frac{u_n}{u_n+8} > 0$; on a donc démontré que $u_{n+1} > 0$.
   - On a vérifié que la propriété était vraie pour $n = 0$. On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout $n \geq 0$. Donc, d'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

   On a donc démontré que $u_n > 0$ pour tout n.

2. Étudier les variations de la suite (u_n).

Pour tout n: $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_n+8} - u_n = u_n\left(\frac{1}{u_n+8} - 1\right) = u_n\left(\frac{1-u_n-8}{u_n+8}\right) = \frac{u_n(-u_n-7)}{u_n+8}$

Pour tout n, on a $u_n > 0$ donc $u_n + 8 > 0$ et $-u_n - 7 < 0$.

On en déduit que $\frac{u_n(-u_n-7)}{u_n+8} < 0$ et donc que $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante.

3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n, $v_n = 1 + \frac{7}{u_n}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 8 dont on déterminera le premier terme.

$$v_{n+1} = 1 + \frac{7}{u_{n+1}} = 1 + \frac{7}{\dfrac{u_n}{u_n + 8}} = 1 + \frac{7(u_n + 8)}{u_n} = 1 + \frac{7u_n}{u_n} + \frac{56}{u_n} = 1 + 7 + \frac{56}{\dfrac{7}{v_n - 1}} = 8 + 8(v_n - 1)$$
$$= 8 + 8v_n - 8 = 8v_n$$
$$v_0 = 1 + \frac{7}{u_0} = 1 + \frac{7}{1} = 8$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 8$ et de premier terme $v_0 = 8$.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{7}{8^{n+1}-1}$.

On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = 8 \times 8^n = 8^{n+1}$.
Or $u_n = \frac{7}{v_n-1}$, donc, pour tout n, on a $u_n = \frac{7}{8^{n+1}-1}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

$8 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^{n+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{8^{n+1}-1}\right) = 0$ ce qui veut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$.
Justifier l'existence d'un tel entier n_0 et déterminer sa valeur.

On cherche dans cette question le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n < 10^{-18}$.
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$; donc, d'après la définition de la limite d'une suite, on peut dire qu'à partir d'un certain rang n_0, tous les termes de la suite seront dans l'intervalle $]-10^{-18};\ 10^{-18}[$.
Comme $u_n > 0$ pour tout n, on peut dire qu'il existe un rang n_0 tel que, pour $n > n_0$, on ait $u_n < 10^{-18}$.
On résout l'inéquation $u_n < 10^{-18}$.

$$u_n < 10^{-18} \Leftrightarrow \frac{7}{8^{n+1}-1} < 10^{-18} \Leftrightarrow 7 < 10^{-18}(8^{8n+1} - 1) \Leftrightarrow 7 \times 10^{18} + 1 < 8^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \ln(7 \times 10^{18} + 1) < \ln(8^{n+1}) \Leftrightarrow \ln(7 \times 10^{18} + 1) < (n+1)\ln(8)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ln(7 \times 10^{18} + 1)}{\ln(8)} < n + 1 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(7 \times 10^{18} + 1)}{\ln(8)} - 1$$

Or $n > \frac{\ln(7\times10^{18}+1)}{\ln(8)} - 1 \approx 19{,}87$ donc c'est à partir de $n_0 = 20$ que $u_n < 10^{-18}$.

Exercice 5 – Spécialité uniquement (5 points) Am du Sud Nov 2018

Pour tout entier naturel n , on note F_n le n-ième nombre de Fermat. Il est défini par
$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Partie A :

Pierre de Fermat, leur inventeur, a conjecturé que :

« Tous les nombres de Fermat sont premiers » ,

L'objectif est de tester cette conjecture.

1. (a) Calculer F_0, F_1, F_2 et F_3.

$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$ est premier.
$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ est premier.
$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ est premier.
$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ est premier.

(b) Peut-on en déduire que tous les nombres de Fermat sont premiers ?

On peut en déduire que les 4 premiers nombres de Fermat sont premiers mais on ne sait rien des suivants.

2. On considère l'algorithme ci-dessous:

$F \leftarrow 2^{2^5} + 1$
$N \leftarrow 2$
Tant que $F\%N \neq 0$
    $N \leftarrow N + 1$
Fin Tant que
Afficher N

$F\%N$ désigne le reste de la division euclidienne de F par N.

La valeur affichée à la fin de l'exécution est 641.
Que peut-on en déduire ?

On sort de l'algorithme dès que le nombre N est diviseur du nombre $F = F_5$. Donc on peut affirmer que 641 est un diviseur de F_5.
$F_5 > F_4$ et $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537 > 641$; donc on peut dire que $F_5 > 641$ donc que 641 est un diviseur strict de F_5. On en déduit que F_5 n'est pas premier.

Partie B :

L'objectif est de prouver que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :
$$F_n = (F_{n-1} - 1)^2 + 1$$

Pour tout entier naturel n non nul on a

$(F_{n-1} - 1)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}} + 1 - 1\right)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 1 = 2^{2\times 2^{n-1}} + 1 = 2^{2^n} + 1 = F_n$.

2. Pour tout entier naturel n on note : $\prod_{i=0}^{n} F_i = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_{n-1} \times F_n$.
On a donc $\prod_{i=0}^{n} F_i = \left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right) \times F_n$.
Montrer par récurrence et en utilisant le résultat de la question précédente que pour tout entier naturel n non nul on a : $\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2$.

On va démontrer par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier n non nul.

- Pour $n = 1$, on a: $\prod_{i=0}^{n-1} F_i = \prod_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 3$ et $F_n - 2 = F_1 - 2 = 5 - 2 = 3$.
Donc la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $n = 1$.

- Soit k un entier naturel quelconque non nul tel que $\mathcal{P}_k$ soit vraie donc $\prod_{i=0}^{k-1} F_i = F_k - 2$.
Or $\prod_{i=0}^{k} F_i = \prod_{i=0}^{k-1} F_i \times F_k$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $\prod_{i=0}^{k-1} F_i = F_k - 2$ donc $\prod_{i=0}^{k} F_i = (F_k - 2) \times F_k$.
D'après la question **B.1.** en prenant $k + 1$ à la place de n, on a:
$$F_{k+1} = (F_k - 1)^2 + 1 = (F_k)^2 - 2F_k + 1 + 1 = (F_k - 2) \times F_k + 2$$
Donc $F_{k+1} - 2 = (F_k - 2) \times F_k$.
On en déduit que $\prod_{i=0}^{k} F_i = F_{k+1} - 2$ et donc que la propriété est vraie au rang $k + 1$; elle est donc héréditaire.

- La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geq 1$ donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 1$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2$.

3. Justifier que, pour tous entiers naturels n et m tels que $n > m$, il existe un entier naturel q tel que :
$$F_n - qF_m = 2$$

Soient m et n deux entiers naturels tels que $n > m$.

$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2 \Leftrightarrow \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq m}}^{n-1} F_i \times F_m = F_n - 2$$

On pose $q = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq m}}^{n-1} F_i$; le nombre q est le produit d'entiers naturels donc c'est un entier naturel.
On a donc $qF_m = F_n - 2$ ce qui équivaut à $F_n - qF_m = 2$.
Donc, pour tous m et n tels que $n > m$, il existe un entier naturel q tel que $F_n - qF_m = 2$.

4. En déduire que deux nombres de Fermat sont toujours premiers entre eux.

De l'égalité $F_n - qF_m = 2$ on déduit, d'après le théorème de Bézout, que le nombre 2 est un multiple du PGCD de F_n et de F_m.

Mais un nombre de Fermat est une puissance de 2 augmentée de 1, donc est un nombre impair. On en déduit que le PGCD de F_m et F_n est 1 donc que deux nombres de Fermat (distincts) sont toujours premiers entre eux.