Terminale S3	Évaluation de probabilités (2h)	7/05/2019

Exercice 1 (6 points) Extrait Am du Nord Mai 2018

On étudie certaines caractéristiques d'un supermarché d'une petite ville.

Partie A - Démonstration préliminaire

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,2.
On rappelle que l'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$, est égale à $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x 0{,}2te^{-0{,}2t}\,\mathrm{d}t$
Le but de cette partie est de démontrer que $E(X) = 5$.

1. On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(t) = 0{,}2te^{-0{,}2t}$.
On définit la fonction G sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $G(t) = (-t-5)\mathrm{e}^{-0{,}2t}$.
Vérifier que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

La fonction G sera une primitive de g sur $[0;+\infty[$ si et seulement si elle est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que sa fonction dérivée est la fonction g.
Avec les règles de composition et de produit de fonctions classiques, la fonction G est effectivement dérivable sur $[0;+\infty[$, et pour tout t réel positif, on a :

$$\begin{aligned} G'(t) &= (-1)\times \mathrm{e}^{-0{,}2t} + (-t-5)\times(-0{,}2)\mathrm{e}^{-0{,}2t} \\ &= (-1+0{,}2t+0{,}2\times 5)\mathrm{e}^{-0{,}2t} \\ &= 0{,}2t\mathrm{e}^{-0{,}2t} = g(t) \end{aligned}$$

La fonction G est donc bien une primitive de g sur $[0;+\infty[$.

2. En déduire que la valeur exacte de $E(X)$ est 5.
Indication : on pourra utiliser, sans le démontrer, le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-0{,}2x} = 0$.

En appliquant la définition de l'espérance, rappelée dans l'énoncé, on va commencer par calculer l'intégrale de g entre 0 et x :

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = [G(t)]_0^x = G(x) - G(0) = (-x-5)\mathrm{e}^{-0{,}2x} - (0-5)\mathrm{e}^{-0{,}2\times 0} = -x\mathrm{e}^{-0{,}2x} - 5\mathrm{e}^{-0{,}2x} + 5$$

Déterminons maintenant la limite de cette intégrale quand x tend vers $+\infty$.
Puisque cette limite est admise dans le sujet, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-0{,}2x} = 0$.
Comme $-0{,}2$ est négatif, on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty} -0{,}2x = -\infty$, or $\lim\limits_{y\to-\infty} \mathrm{e}^y = 0$, donc, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}2x} = 0$.
Finalement, par limite de la somme de fonctions, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} -x\mathrm{e}^{-0{,}2x} - 5\mathrm{e}^{-0{,}2x} + 5 = 5$$

En conclusion, on a bien établi que l'espérance $\mathrm{E}(X)$ est bien égale à 5.

Partie B - Étude de la durée de présence d'un client dans le supermarché

Une étude commandée par le gérant du supermarché permet de modéliser la durée, exprimée en minutes, passée dans le supermarché par un client choisi au hasard par une variable aléatoire T.
Cette variable T suit une loi normale d'espérance 40 minutes et d'écart type un réel positif noté σ.
Grâce à cette étude, on estime que $P(T < 10) = 0{,}067$.

1. Déterminer une valeur arrondie du réel σ à la seconde près.

Posons T' la variable aléatoire définie par $T' = \frac{T-40}{\sigma}$. Puisque T suit une loi normale d'espérance 40 et d'écart-type σ, on peut dire que T' suit la loi normale centrée et réduite.
Par ailleurs les évènements $(T < 10)$ et $\left(T' < \frac{10-40}{\sigma}\right)$ sont équivalents, et ont donc la même probabilité.
En utilisant la calculatrice avec la fonction inversant la loi normale centrée réduite, on obtient que la borne $\frac{10-40}{\sigma} = \frac{-30}{\sigma}$ doit être environ égale à $-1{,}4985$.
En résolvant, on a $\sigma \approx \frac{-30}{-1{,}4985}$, soit $\sigma \approx 20{,}0198$, soit, en donnant un arrondi à la seconde près, 20 min 01 s. (car $0{,}0198 \times 60 \approx 1{,}2$)

2. Dans cette question, on prend $\sigma = 20$ minutes. Quelle est alors la proportion de clients qui passent plus d'une heure dans le supermarché ?

Puisque le temps est exprimé en minutes, une heure correspond à 60 minutes, et donc la probabilité cherchée est obtenue à la calculatrice :

$$P(T \geq 60) = 1 - P(T < 60) \approx 0{,}1587$$

Puisque la question est posée en terme de proportion, on va supposer que la modélisation est fiable et que les probabilités sont assimilables à des proportions, et donc qu'environ 15,9 % des clients passent plus d'une heure dans le supermarché.

Exercice 2 (4 points) Métropole Juin 2018

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.
Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible; elle doit àªtre renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

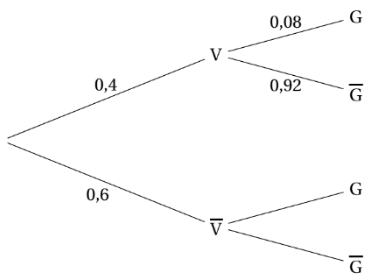
- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :
V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;
G : « la personne a contracté la grippe ».

1. (a) Donner la probabilité de l'évènement G.

$P(G) = 0{,}2$ car 20% de la population a contracté la grippe.

(b) Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

On calcule $P(G \cap V) = 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}032$ soit 3,2% de chances que la personne ait contractée la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28.

On calcule $P_{\overline{V}}(G) = \frac{P(\overline{V} \cap G)}{P(G)}$

D'après la formule des probabilités totales, $P(V \cap G) + P(\overline{V} \cap G) = P(\overline{V})$

donc $P(\overline{V} \cap G) = P(G) - P(V \cap G) = 0{,}2 - 0{,}032 = 0{,}168$ puis $P_{\overline{V}}(G) = \frac{0{,}168}{0{,}6} = 0{,}28$.

Partie B

Dans cette partie, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.

Après la période hivernale, on interroge au hasard n habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à n tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes vaccinées parmi les n interrogées.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?

Il s'agit de n expériences aléatoires identiques et indépendantes à 2 issues (la personne est vaccinée ou non) avec une probabilité de succès de 0,4.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0{,}4)$.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.

(a) Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 personnes interrogées soient vaccinées.

Avec la loi $\mathcal{B}(40; 0{,}4)$:

$$P(X = 15) \approx 0{,}123$$

(b) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées soit vaccinée.

$$P(X \geq 20) = 1 - P(X < 20) = 1 - P(X \leq 19) \approx 0{,}130$$

3. On interroge un échantillon de 3750 habitants de la ville, c'est-à-dire que l'on suppose ici que $n = 3750$.

(a) Donner l'epèrance $E(X)$ de la variable X ainsi que son écart-type et $\sigma(X)$.

Par définition :

$$E(X) = n \times p = 3750 \times 0{,}4 = 1500 \quad et \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{900} = 30$$

(b) On note Z la variable aléatoire définie par : $Z = \frac{X - \mathrm{E(X)}}{\sigma(\mathrm{X})}$.

Quelle est la loi suivie par Z ?

Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$

Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 1450 et 1550 individus vaccinés dans l'échantillon interrogé.

On calcule $P(1450 < X < 1550) = P\left(\frac{1450-1500}{30} < Z < \frac{1550-1500}{30}\right) = P\left(\frac{-5}{3} < Z < \frac{5}{3}\right) \approx 0{,}904$

Exercice 3 (4 points) Pondichéry Avril 2017

Les parties A, B *et* C *peuvent être traitées de façon indépendante.*

Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

La chocolaterie Choc'o fabrique des tablettes de chocolat noir, de 100 grammes, dont la teneur en cacao annoncée est de 85 %.

Partie A

Une machine électronique mesure la teneur en cacao d'une tablette de chocolat. sa durée de vie, en années, peut être modélisée par une variable aléatoire Z suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. La durée de vie moyenne de ce type de machine est de 5 ans.
   Déterminer le paramètre λ de la loi exponentielle.

La durée de vie moyenne est de 5 ans on a donc $E(Z) = 5$ or $E(Z) = \frac{1}{\lambda}$ car Z suit la loi exponentielle de paramètre λ.

Finalement $\lambda = \frac{1}{5} = 0{,}2$

2. Calculer $P(Z > 2)$.

$$\begin{aligned} P(Z > 2) &= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \int_0^2 0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2t} dt \\ &= 1 - [-\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}]_0^2 = 1 - (-\,\mathrm{e}^{-0{,}4} + 1) \\ &= \mathrm{e}^{-0{,}4} \approx 0{,}670 \end{aligned}$$

3. Sachant que la machine de l'atelier a déjà fonctionné pendant 3 ans, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 5 ans ?

On cherche $P_{Z>3}(Z > 5)$

Or on sait que loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement,

On a donc $\mathrm{P}_{Z>3}(Z > 5) = P_{Z>3}(Z > 3 + 2) = P(Z > 2) \approx 0{,}670$.

Partie C

On note X la variable aléatoire donnant la teneur en cacao, exprimée en pourcentage, d'une tablette de 100 g de chocolat commercialisable. on admet que x suit la loi normale d'espérance $\mu = 85$ et d'écart type $\sigma = 2$.

1. Calculer $P(83 < X < 87)$.
   Quelle est la probabilité que la teneur en cacao soit différente de plus de 2 % du pourcentage annoncé sur l'emballage ?

$P(83 < X < 87) = P(\mu - \sigma < X < \mu - \sigma) \approx 0{,}683$ d'après le cours

D'après la question précédente, la probabilité que la teneur en cacao diffère de moins de 2% du pourcentage annoncé est d'environ 0,683 donc la probabilité cherchée est 1-0,683 = 0,317

2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel a tel que : $P(85 - a < X < 85 + a) = 0{,}9$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \frac{X-85}{2}$ alors on sait que Y suit la loi normale centrée réduite

$$85 - a < X < 85 + a \Leftrightarrow -a < X - 85 < a \Leftrightarrow -\frac{a}{2} < \frac{X-85}{2} < \frac{a}{2} \Leftrightarrow -\frac{a}{2} < Y < \frac{a}{2}$$

Donc $P(85 - a < X < 85 + a) = 0{,}9 \Leftrightarrow P\left(-\frac{a}{2} < Y < \frac{a}{2}\right) = 0{,}9$

Soit $P\left(Y < \frac{a}{2}\right) = 0{,}95$. D'après la calculatrice on trouve $\frac{a}{2} \approx 1{,}6449$ donc $a \approx 3{,}2898$ soit 3,290 au millième.

Cela signifie que l'on peut estimer à 90% la proportion de tablette ayant une teneur en cacao entre 81,71% et 88,29%

3. La chocolaterie vend un lot de 10000 tablettes de chocolat à une enseigne de la grande distribution. Elle affirme au responsable achat de l'enseigne que, dans ce lot, 90 % des tablettes ont un pourcentage de cacao appartenant à l'intervalle [81,7 ; 88,3].
Afin de vérifier si cette affirmation n'est pas mensongère, le responsable achat fait prélever 550 tablettes au hasard dans le lot et constate que, sur cet échantillon, 80 ne répondent pas au critère.
Au vu de l'échantillon prélevé, que peut-on conclure quant à l'affirmation de la chocolaterie ?

Ici on répète $n = 550$ fois de manière indépendante le prélèvement d'une tablette dans le lot
La proportion annoncée est $p = 0{,}9$.
On a $n \geq 30, np = 495 \geq 5$ et $n(1-p) = 55 \geq 5$.
On peut donc bâtir l'intervalle de fluctuation asymptotique.
On peut affirmer avec une confiance à 95% que la fréquence de tablettes dont la teneur en cacao est comprise entre 81,7% et 88,3% appartient à l'intervalle $I_n = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$.
Or $p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}87$ et $p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0{,}925 \approx 0{,}93$. Donc $I_n = [0{,}87; 0{,}93]$ mais la fréquence observée est $f = \frac{470}{550} \approx 0{,}85$ et n'appartient donc pas à I_n.
On peut donc conclure que l'affirmation est mensongère au risque de 5% de se tromper.