| Terminale S3 | Évaluation de mathématiques n°1<br>Durée 1h10 mn | 2 septembre 2019 |
|---|---|---|

## *Exercice 1 (6 points)*

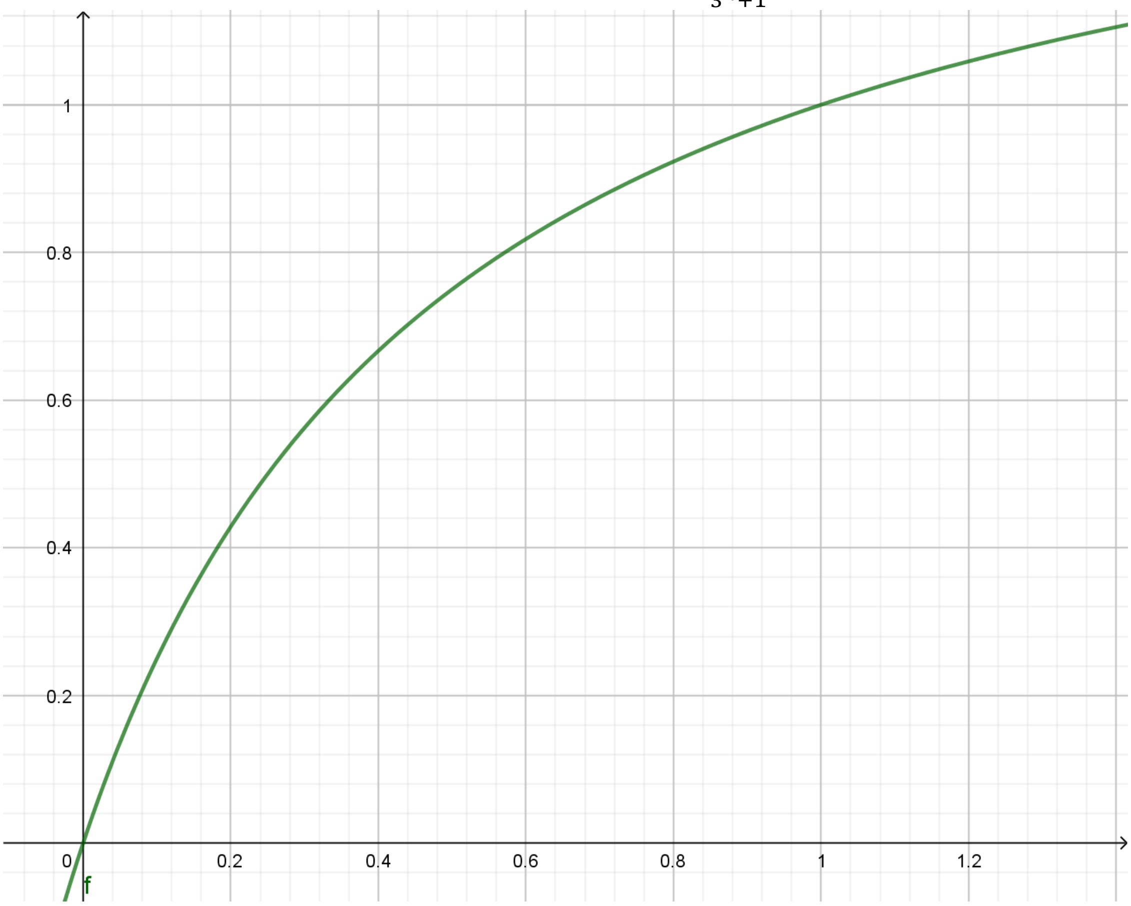
Soit $(v_n)$ la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 4 \end{cases}$

1. Calculer $v_1$ et $v_2$.
2. La suite $(v_n)$ est-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la suite $(v_n)$ est croissante.

## *Exercice 2 (9 points)*

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$ et la fonction $f$ définie et strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$.

1. Construire sur le graphique suivant les 4 premiers termes de la suite $u_n$ en laissant apparaître les traits de construction.
2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel $n$, on a $0 < u_n$.
3. On admet que pour tout entier naturel $n$, $u_n < 1$.
   Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
4. Soit $(v_n)$ la suite définie, pour tout entier naturel $n$, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 3.
   (b) Exprimer pour tout entier naturel $n$, $v_n$ en fonction de $n$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.



## Exercice 3 (5 points)

On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = n^2 + 2n$.

**1.** Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$.

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

**2.** Écrire un algorithme qui affiche le rang du premier terme de la suite $(u_n)$ à partir duquel :

$$u_n > 10^5$$

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

**Question bonus (+1 points !)**

Montrer que pour tout $x$ réel différent de $1$ et tout entier naturel $n$,

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………………