Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°1 Durée 1h30 mn	2 septembre

Exercice 1 (6 points)

Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 4 \end{cases}$

1. Calculer v_1 et v_2.

$$v_1 = \frac{1}{3}v_0 + 4 = \frac{13}{3} \quad ; \quad v_2 = \frac{1}{3}v_1 + 4 = \frac{49}{9}$$

2. La suite est-elle arithmétique, géométrique ? Justifier.

- La suite **n'est pas arithmétique** car $v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$. En effet :
$$v_1 - v_0 = \frac{13}{3} - 1 = \frac{10}{3} \quad et \quad v_2 - v_1 = \frac{49}{9} - \frac{13}{3} = \frac{10}{9}$$

- La suite **n'est pas géométrique** car $\frac{v_1}{v_0} \neq \frac{v_2}{v_1}$. En effet :
$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{13}{3} \times 1 = \frac{13}{3} \quad et \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{49}{9} \times \frac{3}{13} = \frac{49}{39}$$

3. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la suite (v_n)est croissante. .

Soit la propriété : « pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \geq v_n$ »

<u>Initialisation :</u>
Pour $n = 0$: $v_0 = 1$ et $v_1 = \frac{13}{3}$ donc la propriété est vérifiée puisque $v_1 \geq v_0$.

<u>Hérédité</u>
On suppose que la propriété est vraie jusqu'à un certain rang n, donc que $v_{n+1} \geq v_n$.
Peut-on alors montrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire que $v_{n+2} \geq v_{n+1}$.

On a :

$$\begin{array}{rccc} & v_{n+1} & \geq & v_n \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{3}v_{n+1} & \geq & \frac{1}{3}v_n \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\frac{1}{3}v_{n+1} + 4} & \geq & \underbrace{\frac{1}{3}v_n + 4} \\ \Leftrightarrow & v_{n+2} & \geq & v_{n+1} \end{array}$$

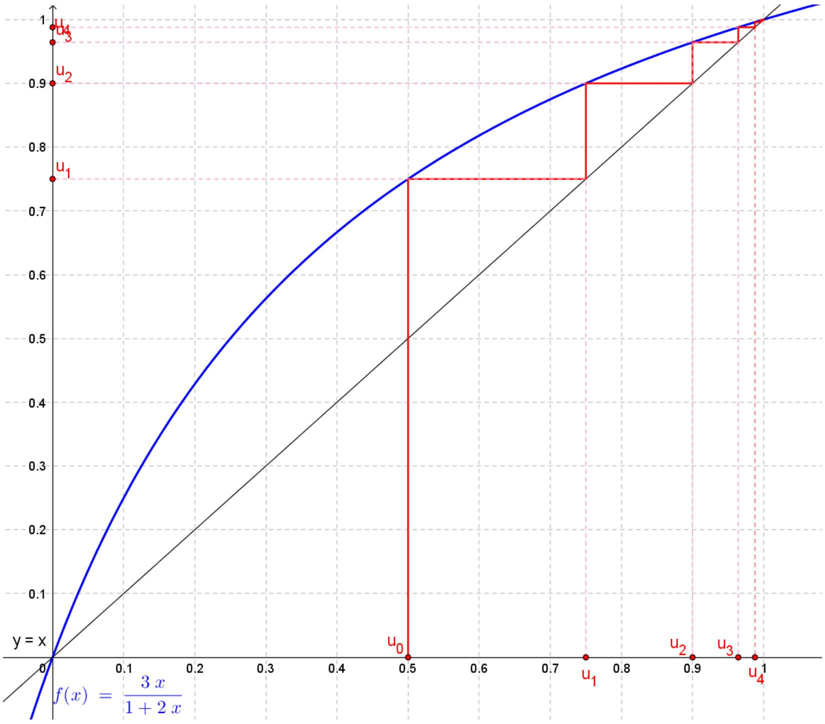
On a montré que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que $v_{n+1} \geq v_n \Rightarrow v_{n+2} \geq v_{n+1}$

<u>Conclusion :</u> pour tout entier naturel n , $v_{n+1} \geq v_n$ ce qui signifie que la suite (v_n) est croissante.

Exercice 2 (9 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$ et la fonction f définie et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+2x}$.

1. Construire sur le graphique suivant les 4 premiers termes de la suite u_n en laissant apparaître les traits de construction.



2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a $0 < u_n$.

Soit la propriété : « pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ »

Initialisation :

Pour $n = 0$: $u_0 = \frac{1}{2}$ donc la propriété est vérifiée puisque $u_n > 0$.

Hérédité

On suppose que la propriété est vraie jusqu'à un certain rang n, donc que $u_n > 0$.
Peut-on alors montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire que $u_{n+1} > 0$.

On a : $u_n > 0$ donc $3u_n > 0$ et $1 + 2u_n > 0$ ce qui permet de conclure que $\frac{3u_n}{1+2u_n} > 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} > 0$

On a montré que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que $u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$

Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

3. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \frac{3u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$.

On sait que d'une part, $u_n < 1$ donc $1 - u_n > 0$ et d'autre part $u_n > 0$ donc $1 + 2u_n > 0$.

Par conséquent, , $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} > 0$ ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

Pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{1-\frac{3u_n}{1+2u_n}} = \frac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{1+2u_n-3u_n}{1+2u_n}} = \frac{3u_n}{1+2u_n} \times \frac{1+2u_n}{1-u_n} = \frac{3u_n}{1-u_n} = 3v_n$$

Pour tout n, $v_{n+1} = 3v_n$ donc la suite est géométrique de raison 3.

(b) Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

Pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{u_0}{1-u_0}\right) \times 3^n = 3^n$

(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

Pour tout entier naturel n,

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \Leftrightarrow (1-u_n)v_n = u_n \Leftrightarrow v_n = u_n + u_n v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1+v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$$

Exercice 3 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 2n$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Pour tout entier n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 + 2(n+1) - n^2 - 2n \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 - n^2 - 2n \\ &= 2n + 3 \end{aligned}$$

Pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

2. Écrire un algorithme qui affiche le rang du premier terme de la suite (u_n) à partir duquel : $u_n > 10^5$

Algorithme

$0 \leftarrow N$
$Tant\ que\ (N^2 + 2N) \leq 10^5\ faire$
$\quad N \leftarrow N + 1$
$Fin\ Tant\ que$
$Afficher\ N$

En Python

```python
n=0
while (n**2+2*n)<=10**5:
    n=n+1
print(n)
```

Question bonus (+1 points !)

Montrer que pour tout x réel différent de 1 et tout entier naturel n,

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 1 + x + \cdots + x^n$ est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme égal à 1 et de raison x donc $1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.