Les nombres complexes

Saison 1 - Épisode 1

Les nombres complexes

Saison 1 - Épisode 1

Les nombres complexes prennent naissance au XVIème siècle lorsqu'un italien *Gerolamo Cardano* (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de *Jérôme Cardan*, introduit $\sqrt{-15}$ pour résoudre des équations du troisième degré.
En 1572, un autre italien, *Rafaele Bombelli* (1526 ; 1573) publie "*Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*" dans lequel il présente des nombres de la forme $a+b\sqrt{-1}$ et poursuit les travaux de *Cardan* sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré.
A cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.
La notation *i* apparaît en 1777 siècle avec *Leonhard Euler* (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires.

I. Forme algébrique et représentation d'un nombre complexe

1. Définition et vocabulaire

Théorème

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels ;
- il contient un nombre tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$;
- il est muni d'une **addition et d'une multiplication** qui ont les **mêmes propriétés que dans** $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

Exemples

- Les nombres -1 ; 0 ; $\frac{3}{4}$; $\sqrt{2}$ sont des nombres réels donc ce sont aussi des éléments de $\mathbb{C}$.
- À l'aide du nombre i et de la multiplication : $-i$; $2i$; $i\sqrt{2}$... sont aussi dans $\mathbb{C}$.
- Avec les additions, les nombres suivants sont aussi dans $\mathbb{C}$: $-1+i$; $\sqrt{2}+2i$

Définition

Tout nombre complexe peut s’écrire sous la forme : $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Cette écriture est appelée **forme algébrique** de z :

- a est appelée **partie réelle** de z, notée $Re(z)$.
- b est appelée **partie imaginaire** de z, notée $Im(z)$.

Remarques

- Lorsque $\mathrm{Im}(z) = 0$, $z = a$ est réel.
- Lorsque $\mathrm{Re}(z) = 0$, $z = ib$ est appelé **imaginaire pur**.

Méthode 1 - Réduire un complexe à sa forme algébrique

Exercice d’application

Soient $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -1 + i$, des nombres complexes.

Déterminer les parties réelles et imaginaires des complexes : $z_3 = z_1 \times z_2$, $z_4 = z_1^2$.

Livre Sésamath page 249

11 ► MÉTHODE 1 p. 232

Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $2(1+2i)$
2) $i(3+i)$
3) $2i(3-2i)$
4) $(1+2i)(-2-2i)$

12 Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $(3+i)^2$
2) $(1+i\sqrt{2})^2$
3) $(5-2i)(5+2i)$
4) $(\sqrt{2}+2i)(3-\sqrt{2}i)$

13 Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $(3-i)(1+2i)+5-i$
2) $(5-2i)(5+2i)$
3) $(2-i)(i+1)$
4) $(\sqrt{2}+2i)(3-\sqrt{2}i)$
5) $(1+2i)(3-i)(-3-3i)$
6) $(7i-3)(7-3i)$
7) $(1-2i)^3$

14

1) Simplifier au maximum les expressions suivantes :
   a) i^2
   b) i^3
   c) i^4
   d) i^5
   e) i^{12}
   f) i^{13}
2) Conjecturer une règle donnant i^n en fonction de n et la démontrer par récurrence.
3) En déduire la valeur de i^{2713}.

15 ALGO

1) Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, donner la formule calculant la partie réelle puis la partie imaginaire de leur produit.
2) Écrire un algorithme qui permet de calculer ces parties réelles et imaginaires lorsqu'on entre celles des complexes z_1 et z_2.

Théorème

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes :

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 & = & a_2 \\ b_1 & = & b_2 \end{cases}$$

L' écriture algébrique d'un nombre complexe est **unique**.

Démonstration

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux complexes tels que $z_1 = z_2$.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 \Leftrightarrow a_1 - a_2 = i(b_2 - b_1) \qquad (1)$$

Raisonnons par l'absurde : si $b_2 \neq b_1$ alors $\frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} = i$.

$\frac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1}$ étant un réel, on aboutit à une contradiction.

Donc $b_1 = b_2$ et on déduit alors de (1) que $a_1 - a_2 = 0$ donc $a_1 = a_2$.

La réciproque est claire.

Exemple

Soit $z = 2x - 1 + i(3 - y)$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, un complexe.
On a $z = 0$ si et seulement si $2x - 1 = 0$ et $3 - y = 0$ c'est-à-dire $x = \frac{1}{2}$ et $y = 3$.

2. Représentation graphique des complexes

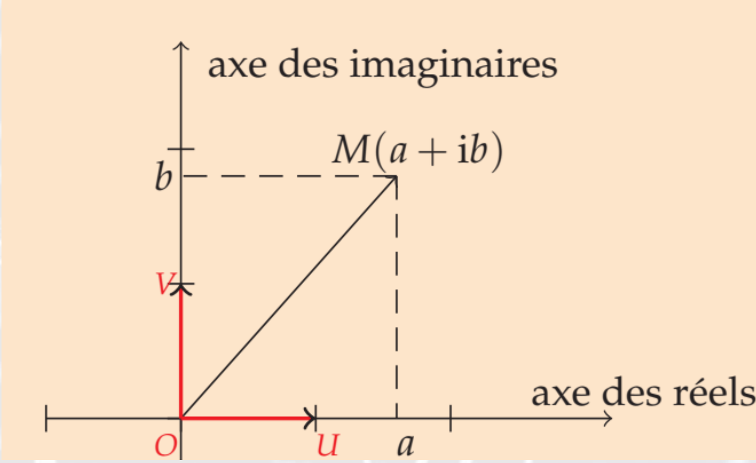
Le plan est muni d'un repère **orthonormé direct** : $\left(O\,;\overrightarrow{OU}\,,\overrightarrow{OV}\right) = (O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

Définition

Tout nombre complexe $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ peut être représenté dans ce repère par :

- un unique point : $M\ (a\ ;\ b)$, appelé **image ponctuelle** de $z = a + ib$.
- un unique vecteur : $\overrightarrow{OM}\ (a\,;b)$ appelé **image vectorielle** de $z = a + ib$.

On dit que $z = a + ib$ est l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
On note souvent $M(z)$ ou $M(a+ib)$ et $\overrightarrow{OM}(z)$ ou $\overrightarrow{OM}(a+ib)$.



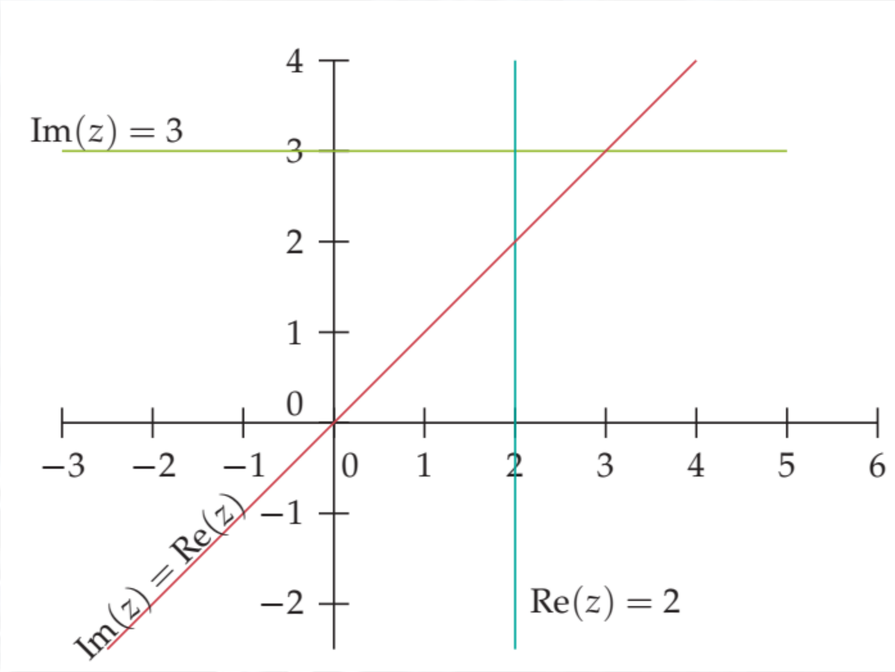
Remarques

- Les complexes $\boldsymbol{z = a} \in \mathbb{R}$ sont les nombres réels et sont représentés sur **l'axe des abscisses**.
- Les complexes $\boldsymbol{z = ib}$, $b \in \mathbb{R}$ sont les **imaginaires purs** et sont représentés sur **l'axe des ordonnées**.
- Le plan est alors appelé **plan complexe**.

Exemple

Dans le plan complexe, on a représenté ci-contre les points d'affixe z tels que

- $\mathcal{Re}(z) = 2$
- $\mathcal{Im}(z) = 3$
- $\mathcal{Re}(z) = \mathcal{Im}(z)$.



II. Addition, multiplication par un réel et géométrie

On se place dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v}\,)$.

1. Addition

Théorème

- Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors $\boldsymbol{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)}$.
- Si z_1 est l'affixe de $\overrightarrow{w_1}$ et z_2 celle de $\overrightarrow{w_2}$ alors $\boldsymbol{z_1 + z_2}$ **est l'affixe de** $\boldsymbol{\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}}$ **.**

Démonstration

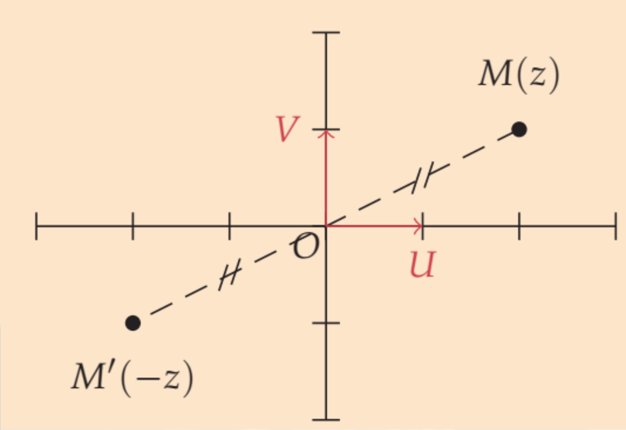
La première règle est en réalité une définition de l'addition des nombres complexes et la seconde une conséquence directe de la formule des coordonnées de la somme des deux vecteurs $\overrightarrow{w_1}(a_1\,;\ b_1)$ et $\overrightarrow{w_2}(a_2\,;\ b_2)$.

Remarque

Dans la pratique, on se passe aisément de la formule en calculant avec les règles habituelles puisque :

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2).$$

2. Opposé d'un nombre complexe



Théorème

- L'opposé du nombre complexe $z = a + ib$ est : $-z = (-a) + (-b)i = -a - bi$.
- z est l'affixe du point M.

  L'opposé de z noté $-z$ est l'affixe du **symétrique** de M par rapport à **l'origine**.
- si z est l'affixe de $\vec{w}$ alors $-z$ est l'affixe de $-\vec{w}$.

Démonstration

- On vérifie que $z + (-z) = 0$. En effet, $z + (-z) = a + ib + ((-a) + i(-b)) = 0$.
- Les points M et N d'affixes respectives z et $-z$ ont pour coordonnées $(a\,;b)$ et $(-a\,;-b)$.

  La formule des coordonnées du milieu donne $\left(\frac{a+(-a)}{2}\,;\frac{b+(-b)}{2}\right)$: le milieu des deux points est bien l'origine du repère $O(0\,;0)$.
- La preuve résulte directement des coordonnées de l'opposé d'un vecteur dans un repère.

3. Soustraction

Théorème

- Si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$.
- Si $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont d'affixes respectives z_1 et z_2 alors $\overrightarrow{w_1} - \overrightarrow{w_2}$ est d'affixe $z_1 - z_2$.
- Si A et B sont d'affixes z_A et z_B alors $z_B - z_A$ est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$.

Démonstration

Elle résulte des définitions et des formules des coordonnées de vecteurs dans les repères.

Méthode 2 – Utiliser les nombres compexes en géométrie

La méthode générale consiste à :

1. Transformer les données géométriques du texte ou les questions en terme de vecteurs puis de nombres complexes.
2. Utiliser les règles de calcul pour résoudre le problème.

Exercice d'application

On considère trois points A, B, C d'affixes :

$$A = -3 + 2i\ ,\ \ B = 1 + i \ \text{ et } \ C = 3 - 4i.$$

1. Déterminer l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2. Déterminer les coordonnées du centre de ce parallélogramme.

4. Multiplication d'un complexe par un réel

Théorème

Soit $z \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{w}$ d'affixe z.

Le complexe λz est l'affixe du vecteur $\lambda\vec{w}$.

Exemple

Soit A, B deux points du plan d'affixe $z_A = 3 - i$ et $z_B = -2 + 3i$.

Le vecteur $2\overrightarrow{AB}$ a pour affixe : $2(z_B - z_A) = 2(-5 + 4i) = -10 + 8i$.

Exercices Sésamath page 249

9 Calculer les sommes suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $\left(1+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)+(3+\mathrm{i})$

2) $(-3+2\mathrm{i})-(4+\mathrm{i})$

3) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\mathrm{i}\right)+(-2-2\mathrm{i})$

4) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\mathrm{i}\right)$

10 Calculer les sommes suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $(2+\mathrm{i}\sqrt{5})+(3-2i\sqrt{5})$

2) $3\mathrm{i}-1+2(\sqrt{2}-\mathrm{i})$

3) $2+\mathrm{i}+\mathrm{i}(3-2\mathrm{i})$

4) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\mathrm{i}\right)$

11 ► **MÉTHODE 1** p. 232

Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $2(1+2\mathrm{i})$

2) $\mathrm{i}(3+\mathrm{i})$

3) $2\mathrm{i}(3-2\mathrm{i})$

4) $(1+2\mathrm{i})(-2-2\mathrm{i})$

12 Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $(3+\mathrm{i})^2$

2) $(1+\mathrm{i}\sqrt{2})^2$

3) $(5-2\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})$

4) $(\sqrt{2}+2\mathrm{i})(3-\sqrt{2}\mathrm{i})$

13 Calculer les expressions suivantes, donner le résultat sous forme algébrique :

1) $(3-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})+5-\mathrm{i}$

2) $(5-2\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})$

3) $(2-\mathrm{i})(\mathrm{i}+1)$

4) $(\sqrt{2}+2\mathrm{i})(3-\sqrt{2}\mathrm{i})$

5) $(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})(-3-3\mathrm{i})$

6) $(7\mathrm{i}-3)(7-3\mathrm{i})$

7) $(1-2\mathrm{i})^3$

14

1) Simplifier au maximum les expressions suivantes :

a) i^2 c) i^4 e) i^{12}

b) i^3 d) i^5 f) i^{13}

2) Conjecturer une règle donnant i^n en fonction de n et la démontrer par récurrence.

3) En déduire la valeur de i^{2713}.

Le plan complexe

Dans toute cette série d'exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

16

1) Placer les points A, B et C dont les affixes respectives sont : $z_A = -3-2\text{i}$, $z_B = 5+2\text{i}$ et $z_C = 1-3\text{i}$.
2) Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3) Le quadrilatère $OABC$ est-il un parallélogramme ?

17 ► MÉTHODE 2 p. 235

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $1+\text{i}$, $2-3\text{i}$ et $-2-\text{i}$.

1) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.
2) Déterminer l'affixe du point I centre du parallélogramme.
3) Placer tous ces points dans un repère orthonormal.

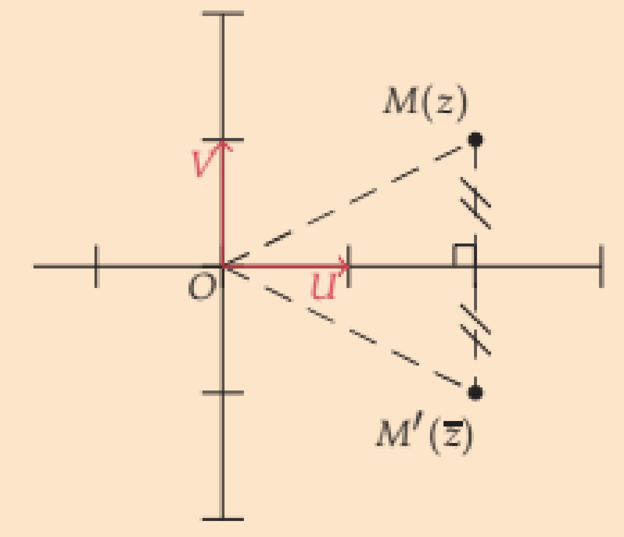
18 Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives : $\dfrac{3-2\text{i}}{2}$, $\dfrac{1}{3}-\text{i}$ et $-3-\text{i}$.

1) Déterminer l'affixe du milieu du segment $[AB]$.
2) Déterminer l'affixe du symétrique de A par rapport à C.
3) Déterminer l'affixe de l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

19 On considère les points M et N d'affixes respectives $z_M = -3-\text{i}$ et $z_N = \dfrac{3+\text{i}}{3}$.

1) Les points O, M, N sont-ils alignés ? Démontrer votre réponse.
2) On considère le point P d'affixe 3i. Déterminer l'affixe du point Q tel que $MNQP$ soit un parallélogramme.

III. Inverse et quotient de nombres complexes



1. Conjugué d'un nombre complexe

Définition

- Le **conjugué d'un nombre complexe** $z = a + ib$ est le complexe $a - ib$, noté $\bar{z}$.
- Si z est l'affixe de M, $\bar{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe des réels.

Démonstration

On prouve la seconde partie de la définition. Soit M d'affixe $z = a + ib$ et N d'affixe $\overline{z} = a - ib$.

En termes de coordonnées on a $M(a\,;\ b)$ et $N(a\,;-b)$. Donc :

- d'une part, le milieu de $[MN]$ a pour coordonnées $(a\,;\ 0)$ et appartient donc à l'axe des réels ;
- d'autre part, on a $\overrightarrow{MN}\ (0\,;\ 2b)$, et donc $\overrightarrow{MN}.\vec{u} = 0$.

Donc, soit $M = N$ et dans ce cas $b = 0$, ce qui signifie que les deux points sont confondus sur l'axe des réels; soit $M \neq N$ et les deux constatations précédentes montrent que l'axe des réels est la médiatrice du segment $[MN]$.

Dans les deux cas cela prouve le résultat.

Théorème

1. $z + \bar{z} = 2\,Re(z)$; $z - \bar{z} = 2 \times i \times \, Im(z)$.
2. z est réel si et seulement si $\bar{z} = z$.
3. z est imaginaire pur si et seulement si $\bar{z} = -z$.

Démonstration

1. On écrit z sous sa forme algébrique $z = a + ib$ et on a donc $\bar{z} = a - ib$. On en déduit :

$$z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2Re(z).$$

La seconde partie se prouve de la même façon.

2. On a $\bar{z} = z \Leftrightarrow \bar{z} - z = 0 \Leftrightarrow 2iIm(z) = 0$ ce qui équivaut à $z \in \mathbb{R}$.
3. Même méthode qu'au 2).

31 Calculer les conjugués des nombres complexes suivants :

1) $9+\mathrm{i}$

2) $5\mathrm{i}-2$

3) $\dfrac{3-\mathrm{i}\sqrt{7}}{7}$

4) $\sqrt{7}+\mathrm{i}\pi$

32 Calculer les conjugués des nombres complexes suivants :

1) $7-\left(3+\dfrac{5}{3}\mathrm{i}\right)$

2) $(3-5\mathrm{i})+\sqrt{2}$

3) $\dfrac{3}{2}+3\mathrm{i}+(1-\mathrm{i})$

4) $(5-\mathrm{i})\left(\sqrt{2}+3\mathrm{i}\right)$

33 Résoudre les équations suivantes :

1) $\bar{z}=2\bar{z}+1$

2) $-\bar{z}=1+\mathrm{i}$

3) $\dfrac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}=2\mathrm{i}$

4) $(\bar{z}+1)(2+3\bar{z}-\mathrm{i})=0$

37 Soit z, un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

1) $3z$

2) $z+5-\mathrm{i}$

3) z^2+2z

4) $\dfrac{z+1}{3}$

5) $\mathrm{i}z+2$

6) $\dfrac{\mathrm{i}-z}{z+1}$

38 Soit z, un nombre complexe, déterminer les conjugués des nombres complexes suivants :

1) $2z-\bar{z}$

2) $z+\dfrac{1}{\bar{z}}$

3) $z^2+\bar{z}^2$

4) $\mathrm{i}\bar{z}$

5) $z+\mathrm{i}\bar{z}$

6) $-2\bar{z}$

2. Inverse d'un nombre complexe

Théorème

Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un nombre complexe z' tel que $zz' = 1$.
Ce nombre s'appelle l'inverse de z, noté $\frac{1}{z}$ et il est tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \times \overline{z}}.$$

Si $z = a + ib \neq 0$ alors la forme algébrique de $\frac{1}{z}$ est : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\frac{-b}{a^2 + b^2}$.

Démonstration

Soit $z \neq 0$. $z \times \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$ est un réel positif non nul.

Il admet donc un inverse dans $\mathbb{C}$ que l'on note $\frac{1}{z \times \overline{z}}$.

On a donc $(z \times \overline{z}) \times \frac{1}{z \times \overline{z}} = 1$ et donc $z \times \left(\overline{z} \times \frac{1}{z \times \overline{z}}\right) = 1$.

Le nombre complexe z admet donc un inverse dans qui est $\overline{z} \times \frac{1}{z \times \overline{z}}$ et on en déduit facilement la forme algébrique.

Exemple

Dans la pratique, on effectue une multiplication par le conjugué du dénominateur pour se ramener à un dénominateur réel.

1. $z = 2\mathrm{i}$.

   On a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}} = \dfrac{-2\mathrm{i}}{2i\times(-2\mathrm{i})} = \dfrac{-2\mathrm{i}}{4} = -\dfrac{1}{2}i.$

2. $z = \dfrac{1}{2+3\mathrm{i}} = \dfrac{(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})} = \dfrac{2-3\mathrm{i}}{4+9} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}i.$

39 Déterminer les inverses des nombres complexes suivants :

1) $3 + 2\mathrm{i}$

2) $-2\mathrm{i} + 3$

3) $-2\mathrm{i}$

4) $\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}\mathrm{i}$

5) $3 - \mathrm{i}(2 + \mathrm{i})$

6) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. Quotient d'un nombre complexe

Définition

Soient z_1 et $z_2 \neq 0$ deux nombres complexes.

On définit leur quotient par :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2}$$

Méthode 3 – Calculer et utiliser le quotient des nombres complexes

Exercice d'application

Résoudre l'équation : $(1+i)z - 2 = 3 + 2\mathrm{i}$.

Correction :

On procède comme pour les nombres réels en isolant l'inconnue z :

$$(1+i)z - 2 = 3 + 2\mathrm{i} \Leftrightarrow (1+i)z = 5 + 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = \frac{5+2\mathrm{i}}{1+i} = \frac{(5+2\mathrm{i})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{7-3\mathrm{i}}{2}$$

L'unique solution est donc le nombre complexe : $z = \frac{7}{2} - \frac{3}{2}i$.

40 Mettre les quotients des nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1) $\dfrac{1-i}{2+3i}$

2) $\dfrac{7}{i}$

3) $\dfrac{1+i}{1-i}$

4) $\dfrac{3+2i}{i-2}$

5) $\dfrac{1+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}$

6) $\dfrac{i(1+2i)}{3-i}$

41 Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1) $\left(\dfrac{1}{1-i}\right)^2$

2) $\dfrac{1}{2-i\sqrt{2}}+\dfrac{2i}{1-i}$

3) $(3+i)\dfrac{3-2i}{5-i}$

4) $\dfrac{27+13i}{21-2i}$

5) $7+\dfrac{3+10i}{5-5i}$

6) $\dfrac{5+i}{5-i}+i$

7) $\dfrac{2-i}{3+i}-\dfrac{2}{1-i}$

8) $\dfrac{6-i}{3-3i}\times\dfrac{2+i}{2-i}$

4. Opérations avec les conjugués des nombres complexes

Théorème

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes.

1) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

3) $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$.

5) $\overline{z_1^n} = (\overline{z_1})^n$, n entier naturel.

Démonstration

Démonstration

- On prouve la troisième égalité, les deux premières se faisant de la même manière dans un contexte plus simple.

  On écrit les complexes z_1 et z_2 sous forme algébrique : $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$.

  On a alors : $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)} = (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1)$.

  D'autre part :

$$\begin{aligned}\overline{z_1} \times \overline{z_2} &= (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) \\ &= (a_1a_2 + b_1b_2i^2) - i(a_1b_2 + a_2b_1) \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) - i(a_1b_2 + a_2b_1)\end{aligned}$$

  Ce qui donne bien l'égalité cherchée.

- Pour l'égalité 4) : $\overline{z_2} \times \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_2 \times \frac{z_1}{z_2}} = \overline{z_1}$ d'après la propriété 3). Donc en redivisant par $\overline{z_2} \neq 0$ on obtient bien le résultat du 5).
- L'égalité 5) se démontre par récurrence (voir exercice exo-preuve-puissance-conjugue).

Exemple

Démontrons que $S = (1+\mathrm{i})^5 + (1-i)^5$ est un nombre réel.

On a $\overline{(1+i)^5} = (\overline{1+i})^5 = (1-i)^5$.

Donc $S = z + \overline{z} = 2Re(z)$ avec $z = (1+i)^5$.

S est donc bien un nombre réel.

47 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $\overline{z} + z = 3\mathrm{i}$

2) $(3+\mathrm{i})\overline{z} + 2z = 0$

3) $-2\overline{z} = (-2-\mathrm{i})\overline{z} + 1$

4) $2\mathrm{i}\overline{z} = 3\mathrm{i} + 2\mathrm{i}z$

48 Résoudre les équations suivantes avec la méthode la mieux adaptée :

1) $\bar{z} - 2\mathrm{i}z = 3$

2) $z - \mathrm{i} = \bar{z}$

3) $\mathrm{i}\bar{z} = 3z - 2\mathrm{i}$

4) $2\mathrm{i}\bar{z} = \dfrac{\bar{z} - \mathrm{i}}{2}$

5) $\dfrac{z}{\bar{z}+1} = 3$

6) $\dfrac{\bar{z}}{z-1} = 2$

49 On pose pour tout $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = z + 3\bar{z} - 5\mathrm{i} + 1.$$

1) Écrire $\mathrm{Re}(f(z))$ et $\mathrm{Im}(f(z))$ en fonction de a et b.

2) Résoudre l'équation $f(z) = 0$.

IV. Équations du second degré

Théorème

Pour tout nombre réel non nul a, l'équation $z^2 = a$ admet deux racines dans :

- Si $a > 0$, les racines sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$, les racines sont $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$.

Exemples

Les solutions de : $z^2 = 16$ sont 4 et -4.

Les solutions de $z^2 = -5$ dans $\mathbb{C}$ sont $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$ (alors que cette équation n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$)

Théorème

Soit $az^2 + bz + c = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

- Si $\Delta = 0$, l'équation a une unique solution dans $\mathbb{R}$: $\boldsymbol{z_0 = \frac{-b}{2a}}$
- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$: $\boldsymbol{z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \; et \; z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$.
- $\Delta < 0$, l'équation a deux solution dans $\mathbb{R}$ qui sont conjuguées :

$$\boldsymbol{z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \; et \; z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}}$$

Remarque

- Toute expression $Q(z) = az^2 + bz + c$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, se factorise dans $\mathbb{C}$ et :

$$Q(z) = az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

- $Q(z) = az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a(z^2 - Sz + P)$ avec :

$$S = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } P = z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}.$$

Méthode : Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a) $z^2 + 5 = 0$ b) $z^2 + 3z + 4 = 0$