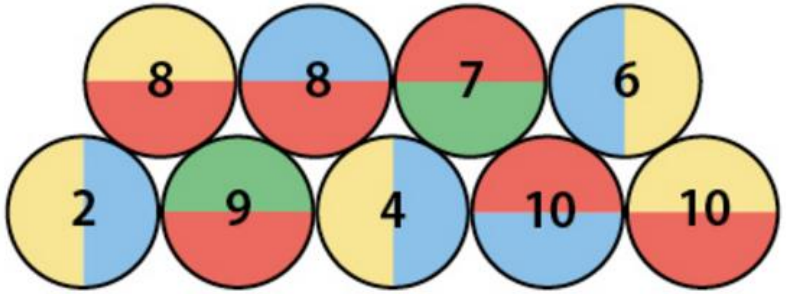
Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Rappels

Pour découvrir : Activité 26 page 41

Une urne contient neuf boules bicolores numérotées :
– trois sont jaunes et bleues et chacune est numérotée 2, 4 ou 6 ;
– deux sont jaunes et rouges et chacune est numérotée 8 ou 10 ;
– deux sont rouges et vertes et chacune est numérotée 7 ou 9 ;
– deux sont bleues et rouges et chacune est numérotée 8 ou 10.



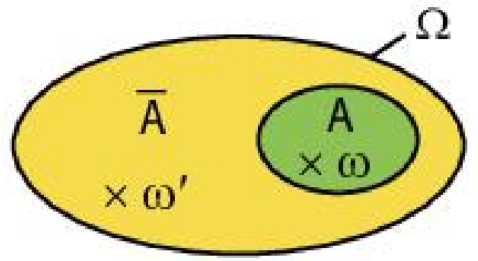
On tire au hasard une boule de cette urne, et on note respectivement :
– A l'événement « la boule tirée ne porte pas de vert » ;
– B l'événement « la boule tirée porte du jaune et du bleu » ;
– C l'événement « la boule tirée porte du jaune ou du bleu » ;
– D l'événement « la boule tirée porte du rouge et ne porte pas de vert » ;
– E l'événement « la boule tirée ne porte pas de rouge » ;
– F l'événement « la boule tirée ne porte pas de jaune ou porte un numéro au moins égal à 7 ».

1. Préciser le nombre d'issues composant chacun des événements A, B, C, D, E .

2. Associer à chacun des événements A, B, C, D, E sa description, à choisir parmi les trois suivantes :
– « la boule tirée porte un numéro pair » ;
– « la boule tirée porte le n° 8 ou le n° 10 » ;
– « la boule tirée porte un numéro au plus égal à 6 ».

3. a. L'issue « la boule tirée est jaune et rouge et porte le numéro 8 » est-elle dans F ?
b. Quel(s) événement(s) A, B, C, D ou E est (sont) constitué(s) de l'ensemble des issues qui ne sont pas dans F ?

Probabilités conditionnelles et indépendance



ω et ω′ sont deux issues de Ω

- $\omega \in A$
- $\omega' \in \bar{A} \Leftrightarrow \omega' \notin A$

I. Rappels

Pour découvrir : Activité 26 page 41

Une expérience aléatoire est un processus dont le résultat relève du hasard.

Définition – Évènement et évènement contraire

- Dans une expérience aléatoire, chacun des résultats possibles est appelé « issue » et l'ensemble constitué par toutes les issues est appelé « univers », noté Ω.
- Un « événement » est un ensemble d'issues et on considère également qu'une issue est un événement (dit « élémentaire »)
- Si A est un événement, on note $\bar{A}$ l'événement « contraire » de A : c'est l'événement constitué par toutes les issues qui ne sont pas dans A.

Exemple :1 page 297
→ Exercices 12 à 15 page 304

Dans cet exemple, on considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu classique de 32 cartes.

Exemple 1 Événement et événement contraire

L'univers de cette expérience est composé de 32 issues : « Tirer le roi de pique » est une de ces issues.

- L'événement A « La carte tirée est un as » est composé de quatre issues puisqu'il y a quatre as dans le jeu.
- L'événement contraire de A est $\overline{A}$ « Tirer une carte qui n'est pas un as » et cet événement est composé de $32-4=28$ issues.

12 Deux élèves sont choisis au hasard dans une classe. Dans chaque cas, décrire l'événement contraire de l'événement donné, sans utiliser de négation.

a. « Les deux élèves sont des filles. »
b. « Les deux élèves sont une fille et un garçon. »
c. « Au moins un des deux élèves est un garçon. »

13 Si on tire deux cartes dans un jeu classique de 32 cartes, les événements « Les deux cartes sont des as » et « Aucune des deux cartes n'est un as » sont-ils contraires ? Expliquer.

14 Si on tire deux cartes au hasard et sans remise dans un jeu de 32 cartes classique, quel est le contraire de l'événement « Au moins une des deux cartes est un cœur ou un roi et l'autre n'est pas un cœur » ?

15 Yannis a lancé cinq fois une pièce de monnaie équilibrée. Soit N le nombre de fois où Yannis a obtenu « Pile ».

1. Si possible, associer à chacun des cinq événements : $\{N<2\}$, $\{N\leqslant 2\}$, $\{N>2\}$, $\{N\geqslant 2\}$ et $\{N\leqslant 1\}$ sa description, à choisir parmi les propositions suivantes :

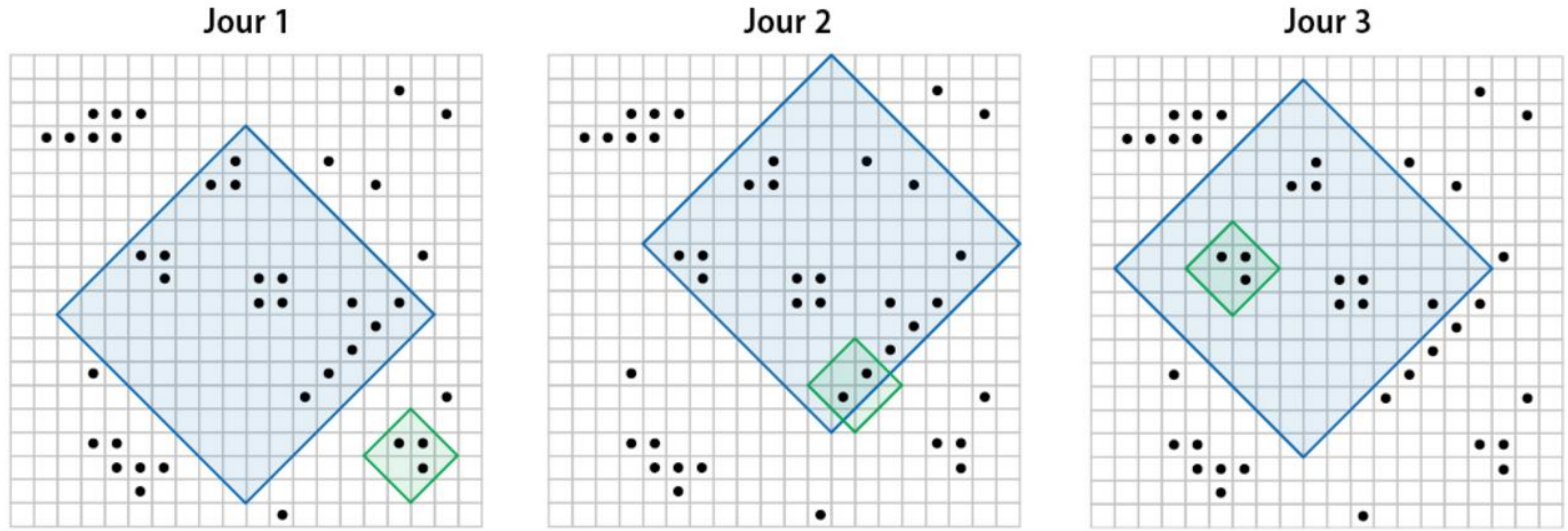
a. Il a obtenu au moins deux fois « Pile »;
b. Il a obtenu moins de deux fois « Pile »;
c. Il a obtenu au plus deux fois « Pile »;
d. Il a obtenu plus de deux fois « Pile ».

2. Parmi les cinq événements de la question précédente, dire lesquels sont contraires et lesquels sont égaux.

En probabilités, on utilise des notations qui permettent d'être plus concis.

Pour découvrir :
Activité 7 page 31

Deux nuages de fumées toxiques A et B survolent une région carrée, de côté 1 km. Ces nuages sont modélisés par deux carrés d'aires 0,02 km^2 et 0,32 km^2 respectivement représentés en vert et en bleu sur chacune des figures ci-dessous. Ces figures indiquent leurs positions durant trois jours consécutifs.
Les zones de la région survolées par un seul des deux nuages sont placées en « alerte orange » et celles survolées par les deux nuages en « alerte rouge ». Les autres zones sont dites « calmes ».



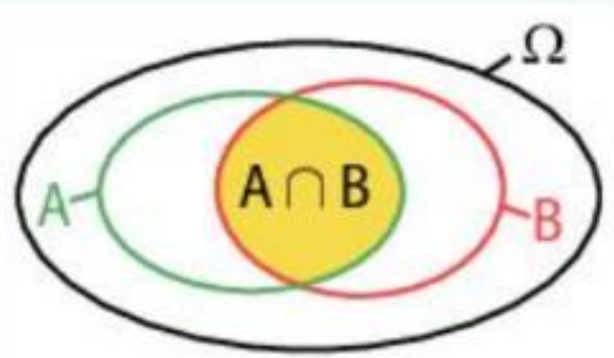
1. Préciser les aires en km^2 des zones respectivement en « alerte orange », en « alerte rouge » et « calmes » pour chaque jour.

2. Ces nuages s'avèrent particulièrement dangereux pour les animaux. Un chien errant parcourt la région pendant ces trois jours. Ignorant le danger, il élit domicile au hasard chaque jour dans une des 40 granges de cette zone, qui sont représentées par des points • sur chacune des trois figures.
a. Quelles sont les probabilités respectives que ce chien se trouve dans une zone en « alerte orange », « rouge » ou « calme », chacun des trois jours ?
b. Si ce chien reste les trois jours dans la même grange, quelle est la probabilité qu'il se trouve chaque jour dans une zone « calme » ?

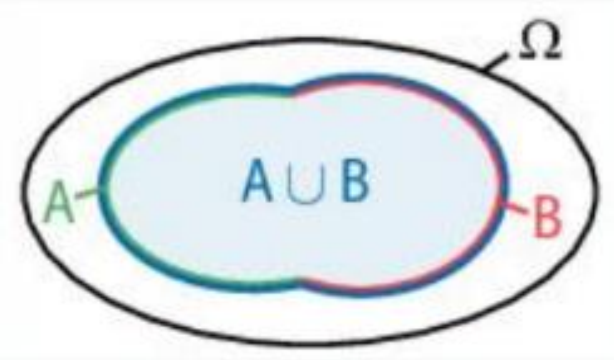
En probabilités, on utilise des notations qui permettent d'être plus concis.

Pour découvrir : Activité 7 page 31

- On note $A \cap B$ l'événement constitué des issues qui sont à la fois dans A et B.

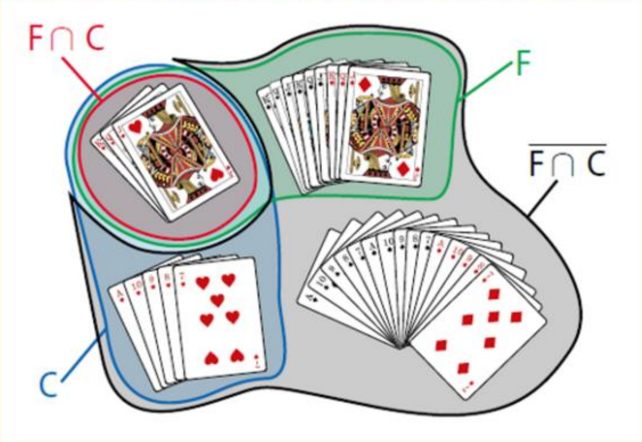


- On note $A \cup B$ l'événement constitué des issues qui sont dans au moins un des deux ensembles A ou B.



Exemple : 2 page 297
→ Exercices 18 à 20 page 305

Exemple 2 Union et intersection de deux événements, événement contraire



Soit F et C les événements « La carte tirée est une figure (un roi, une dame ou un valet) » et « La carte tirée est un cœur ».
L'événement $F \cap C$ correspond à « La carte tirée est une figure et un cœur », et son contraire $\overline{F \cap C}$ est « La carte tirée n'est pas une figure ou n'est pas un cœur ».

En effet, les issues qui composent $\overline{F \cap C}$ sont celles qui ne sont pas à la fois dans F et dans C, autrement dit celles qui ne sont pas dans F ou celles qui ne sont pas dans C. Ainsi, $\overline{F \cap C} = \overline{F} \cup \overline{C}$.

Pour les exercices 18 et 19, on considère une pépinière composée de 720 plants, 80 % des arbres sont des conifères, 60 % des arbres sont âgés de moins de deux ans dont 300 sont des conifères.
Nicolas le jardinier choisit un arbre au hasard et on note C l'événement « Cet arbre est un conifère » et D l'événement « Cet arbre est âgé de moins de deux ans ».

18 **1.** Donner les probabilités des événements C, D et $C \cap D$.

2. En déduire les probabilités des événements $C \cup D$ et $\overline{C \cup D}$.

19 Calculer la probabilité $P\left(D \cap \overline{C}\right)$ et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

20 Soit A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire et tels que $P(A) = 0,2$; $P(B) = 0,6$ et $P(A \cap B) = 0,12$.

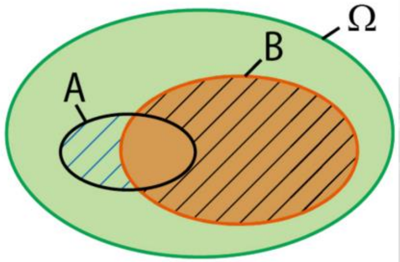
Calculer les probabilités :

a. $P\left(A \cap \overline{B}\right)$

b. $P(A \cup B)$

c. $P\left(\overline{A \cup B}\right)$

d. $P\left(\overline{A} \cap B\right)$



Définition - Notion de probabilité

Une probabilité P sur Ω est une fonction qui, à tout événement, associe un nombre de l'intervalle [0 ; 1] et qui vérifie :

- $\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$
- pour tous événements **incompatibles** A et B, c'est-à-dire tels que $A \cap B$ ne contient aucune issue,

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B).}$$

On donne deux conséquences immédiates et très utiles de cette définition.

Proposition 1 - Conséquences de la définition d'une probabilité (Dém exo 29 page 300)

- Pour tout événement A, on a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cap B) = 0$.

Le deuxième point de la définition d'une probabilité se généralise.

Proposition 2 - Formule du crible pour deux événements (Dém page 300)

Pour tous événements A et B, on a

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

On est souvent amené à travailler dans le cas particulier suivant, par exemple dans une expérience de tirage unique où les éléments à choisir sont indistinguables.

Définition - Équiprobabilité

On dit que les issues de Ω sont équiprobables si elles ont toutes la même probabilité.

Alors, pour toute issue ω , $P(\omega) = \frac{1}{n}$ et pour tout événement A composé de k issues, $P(A) = \frac{k}{n}$

Exemple : 3 page 297
→ Exercices 25 à 28 page 295

Exemple 3 Équiprobabilité et formule du crible

Avec les notations de l'Exemple 2, il y a 8 cœurs et $4\times3=12$ figures dans le jeu. Ainsi, l'événement C est composé de 8 issues et l'événement F est constitué de 12 issues. Comme les cartes ont toutes la même probabilité d'être tirées (c'est la situation qui sous-entend cette hypothèse d'équiprobabilité), on a :

$$P(\mathrm{C})=\frac{8}{32}=\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(\mathrm{F})=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}.$$

Or, il y a 3 cartes qui sont des figures et des cœurs, donc $P(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})=\frac{3}{32}$.

D'après la formule du crible :

$$P(\mathrm{F}\cup\mathrm{C})+P(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})=P(\mathrm{F})+P(\mathrm{C}),$$

soit $P(\mathrm{F}\cup\mathrm{C})+\frac{3}{32}=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$, d'où $P(\mathrm{F}\cup\mathrm{C})=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{32}$, puis $P(\mathrm{F}\cup\mathrm{C})=\frac{8+12-3}{32}=\frac{17}{32}$.

On peut contrôler la valeur du numérateur avec le dénombrement : $\mathrm{F}\cup\mathrm{C}$ est composé des 8 issues de C et des $3\times3=9$ issues qui sont dans F mais pas dans C (car on les a déjà comptabilisées), soit 17 issues.

Dans les exercices 25 et 26, A et B sont deux événements relatifs à une même expérience aléatoire.

25 Si $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0{,}2$, $P(\mathrm{A})=0{,}7$ et $P(\mathrm{B})=0{,}3$, que vaut $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$?

26 Pourquoi n'est-il pas possible d'avoir à la fois : $P(\mathrm{A})=0{,}8$, $P(\mathrm{B})=0{,}6$ et $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0{,}3$?

27 Dans un groupe de 20 adolescents pratiquant tous le football ou le rugby, 15 pratiquent le football et 8 pratiquent le rugby. Si on choisit un de ces adolescents au hasard, quelle est la probabilité qu'il pratique le football et le rugby ?

28 Dans le lycée de Yasmina, 35 % des élèves de 1re ont choisi la spécialité mathématiques, 15 % ont choisi les spécialités mathématiques et physique-chimie et 70 % ont choisi au moins une de ces deux spécialités.
Yasmina affirme que la moitié des élèves de 1re de son lycée ont choisi la spécialité physique-chimie. A-t-elle raison ?

II. Conditionnement et indépendance

Une loi de probabilité P est définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire.

A. Probabilité de B sachant A

Définition

A et B sont deux événements, avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par : $\boldsymbol{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

Remarque : si $P(B) \neq 0$, on définit de même la probabilité de l'événement A sachant B par $\boldsymbol{P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

Exemple

Un service après-vente a constaté que les retours d'un appareil sont dus dans 30 % des cas à une panne A, dans 40 % des cas à une panne B et dans 3 % des cas à la simultanéité des deux pannes.

Un appareil choisi au hasard présente la panne A.

La probabilité pour qu'il ait aussi la panne B est : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}03}{0{,}3} = 0{,}1$

Exemple : 2 page 323

→ Exercices 23 à 26 page 331

Comment ça fonctionne ?

Pour les trois exemples, on considère la situation et l'expérience aléatoire suivantes : à un devoir commun, en 1re A, 18 des 30 élèves ont eu la moyenne et en 1re B, 24 des 35 élèves ont eu la moyenne.
On choisit un des élèves de ces deux classes au hasard. Soit M l'événement « Cet élève a eu la moyenne » et A l'événement « Cet élève est en 1re A ».

Exemple 2 Probabilité d'un événement sachant un autre événement

– Par définition, puisque $P(\mathrm{A})$ est non nulle, le nombre $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ existe et il est égal à la probabilité que l'élève choisi au hasard ait eu la moyenne, sachant qu'il est en 1re A.

Remarque : Bien distinguer les probabilités $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{M})$: la première est une probabilité conditionnelle et l'autre la probabilité d'une intersection.

Toujours par définition :

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{M})}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{18}{65}}{\frac{30}{65}} = \frac{18}{65} \times \frac{65}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$$

Méthode : On peut remarquer que $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = \frac{18}{30}$ est la proportion des élèves ayant eu la moyenne parmi les élèves de 1reA (voir le tableau dans l'Exemple 1).
Cette remarque peut être utilisée en pratique à partir des données de l'énoncé.

– De même, puisque $P(\mathrm{M})$ est non nulle, le nombre $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{A})$ existe et il est égal à la probabilité que l'élève choisi au hasard soit en 1re A, sachant qu'il a eu la moyenne. On a donc $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{M})}{P(\mathrm{M})} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$.

Pour s'entraîner ➥ Exercices 23 à 26, p. 331

Reconnaître des probabilités conditionnelles

Dans les exercices 23 à 26, on choisit au hasard une personne dans une population et on note respectivement L et V les événements « Cette personne porte des lunettes » et « Cette personne a les yeux verts ».

Dans chaque exercice :

a. indiquer parmi les probabilités $P(\mathrm{L})$, $P(\mathrm{V})$, $P_{\mathrm{L}}(\mathrm{V})$, $P_{\mathrm{V}}(\mathrm{L})$ et $P(\mathrm{L} \cap \mathrm{V})$ celles qui sont données dans l'énoncé ;

b. calculer la probabilité demandée.

23 Dans la population A, 10 % des personnes ont les yeux verts et portent des lunettes et 25 % des personnes qui portent des lunettes ont les yeux verts. Quelle est la probabilité que la personne choisie porte des lunettes ?

Corrigé détaillé ➡ p. 385

24 Dans la population B, 20 % des personnes portent des lunettes, dont 15 % ont les yeux verts. Quelle est la probabilité que la personne choisie ait des yeux verts et porte des lunettes ?

Corrigé détaillé ➡ p. 385

25 Dans la population C, 12 % des personnes ont les yeux verts et 5 % portent des lunettes et ont les yeux verts. Si la personne choisie a les yeux verts, quelle est la probabilité qu'elle porte des lunettes ?

26 Dans la population D, 9 % des personnes portent des lunettes et 30 % des personnes ont les yeux verts, parmi lesquelles 24 % portent des lunettes. Si la personne choisie porte des lunettes, quelle est la probabilité qu'elle ait les yeux verts ?

B. Probabilité de $A \cap B$

Propriété

A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de l'intersection des événements A et B est :

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$$

Remarque : si $P(B) \neq 0$, on a de façon analogue $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)}$

Exemple

40 % des chiens d'un éleveur sont des labradors. Les femelles représentent 65 % des labradors et 45 % des autres chiens.

On choisit au hasard le carnet de santé de l'un des chiens de l'éleveur et on note A l'événement : « Le chien est un labrador » et B l'événement : « Le chien est une femelle ».

Ainsi $P(A) = 0{,}4$ et $P_A(B) = 0{,}65$.

La probabilité de $A \cap B$: « Le chien est un labrador femelle » est :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}65 = 0{,}26$$

C. Indépendance de deux évènements

Définition

Dire que des événements A et B sont **indépendants** signifie que

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Exemple : 1 page 323
→ Exercices 9 à 12 page 330

Propriété

Si deux événements A et B sont indépendants, alors les événements $\bar{A}$ et B le sont aussi.

Démonstration (Voir aussi exercice 24 page 326)

D'après le diagramme ci-contre :

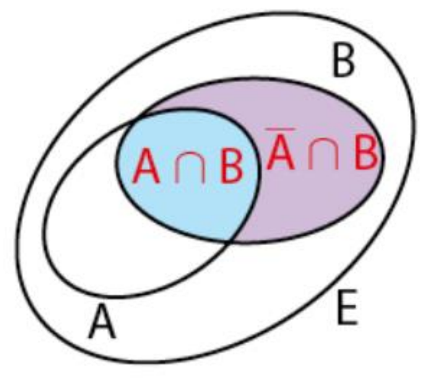
$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$, soit $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

Or A et B sont indépendants, c'est-à-dire $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Par conséquent, $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$

$$= \big(1 - P(A)\big) \times P(B) = P(\bar{A}) \times P(B)$$

Ainsi, les événements $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.



Comment ça fonctionne ?

Pour les trois exemples, on considère la situation et l'expérience aléatoire suivantes : à un devoir commun, en 1re A, 18 des 30 élèves ont eu la moyenne et en 1re B, 24 des 35 élèves ont eu la moyenne.
On choisit un des élèves de ces deux classes au hasard. Soit M l'événement « Cet élève a eu la moyenne » et A l'événement « Cet élève est en 1re A ».

▶ Exemple 1 Indépendance de deux événements

On peut dresser un tableau à double entrée pour synthétiser ces informations. On a, d'une part, $P(A \cap M) = \frac{18}{65}$ et, d'autre part, $P(A) = \frac{30}{65} = \frac{6}{13}$ et $P(M) = \frac{18+24}{65} = \frac{42}{65}$, donc $P(A) \times P(M) = \frac{6}{13} \times \frac{42}{65} = \frac{252}{845}$.

Comme $P(A) \times P(M) \neq P(A \cap M)$, A et M sont non indépendants.

	A	$\overline{A}$	Total
M	18	24	42
$\overline{M}$	12	11	23
Total	30	35	65

Pour s'entraîner ➥ Exercices 9 à 12, p. 330

Calculer les probabilités d'événements indépendants ou non indépendants

Dans les exercices 9 à 12, A et B sont deux événements indépendants relatifs à une même expérience aléatoire. On donnera les probabilités sous forme de fractions irréductibles.

9 **1.** Dans chaque cas, calculer $P(A \cap B)$:

a. si $P(A) = \frac{2}{3}$ et $P(B) = \frac{3}{4}$;

b. si $P(A) = \frac{9}{10}$ et $P(B) = \frac{5}{6}$.

2. Dans chaque cas, calculer $P(A)$:

a. si $P(B) = \frac{5}{6}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$;

b. si $P(B) = \frac{2}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{8}{15}$.

Corrigé détaillé ➥ p. 385

10 On suppose que $P(A) = \frac{4}{5}$ et $P(B) = \frac{5}{8}$.

Calculer $P(A \cap B)$, puis en déduire $P(A \cup B)$ à l'aide de la formule du crible.

11 On suppose que $P(A) = \frac{4}{5}$ et $P(B) = \frac{3}{4}$.

1. Calculer $P\left(A \cap \overline{B}\right)$.

2. Justifier l'indépendance de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, puis calculer $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.

Corrigé détaillé ➥ p. 385

12 On suppose que $P\left(\overline{A}\right) = \frac{7}{10}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$.

Montrer que $P(B) = \frac{2}{3}$.

III. Arbres pondérés

Une loi de probabilité P est définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire.

A. Arbre pondéré par des probabilités

Exemple

On reprend l'exemple du paragraphe *II.B)*.

On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-dessous réalisé en respectant certaines règles.

40 % des chiens d'un éleveur sont des labradors.

Les femelles représentent 65 % des labradors et 45 % des autres chiens.

On choisit au hasard le carnet de santé de l'un des chiens de l'éleveur et on note A l'événement : « Le chien est un labrador » et B l'événement : « Le chien est une femelle ».

Exemple

40 % des chiens d'un éleveur sont des labradors.

Les femelles représentent 65 % des labradors et 45 % des autres chiens.

On choisit au hasard le carnet de santé de l'un des chiens de l'éleveur et on note A l'événement : « Le chien est un labrador » et B l'événement : « Le chien est une femelle ».

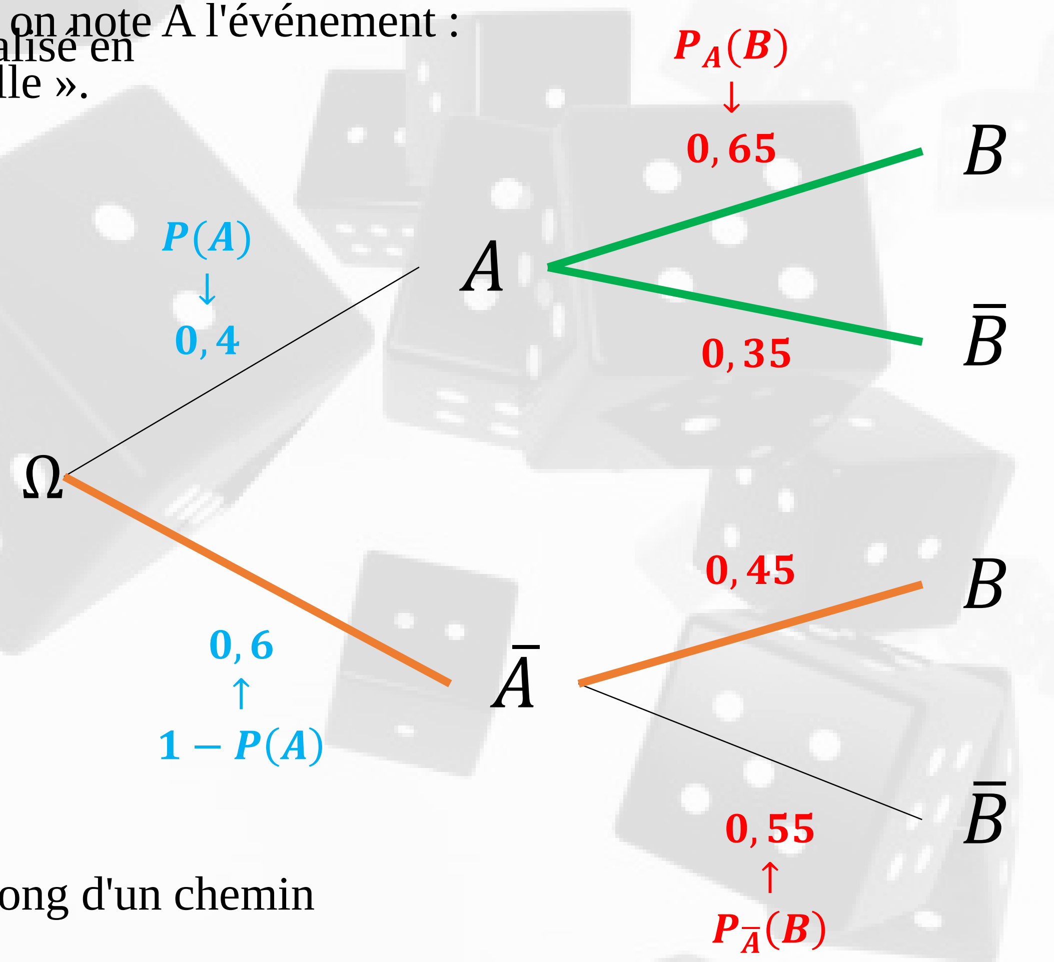
On reprend l'exemple du paragraphe *I.B)*.

On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-dessous réalisé en respectant certaines règles.

- **Règle 1** Sur les branches du niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants.

- Règle 2 Sur les branches du 2ème niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.

- Règle 3 La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1.



Remarque : le produit des probabilités des événements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Par exemple, pour le chemin orange, on retrouve

$$P(\bar{A}\cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0{,}6 \times 0{,}55 = 0{,}33$$

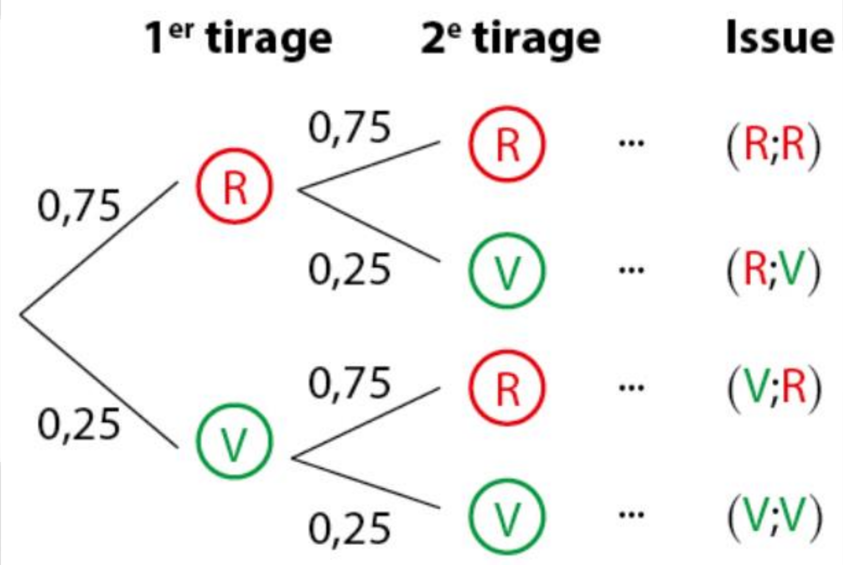
B. Succession de deux épreuves indépendantes

Vocabulaire :

Dans une succession de deux épreuves, lorsque l'issue de l'une quelconque de ces épreuves ne dépend pas des issues de l'autre épreuve, on dit que ces épreuves sont indépendantes.

Exemple

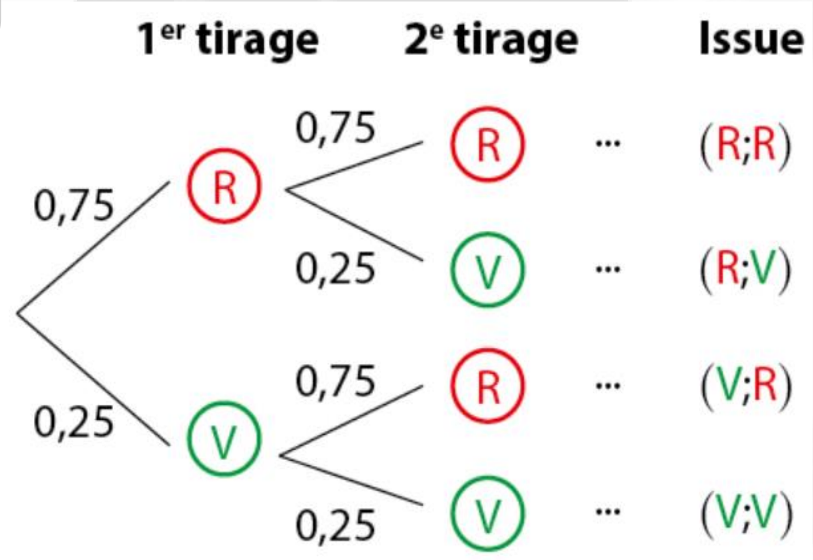
Une urne opaque contient trois boules rouges et une boule verte.
On prélève, au hasard et avec remise, deux boules de cette urne et on note les couleurs obtenues.



Une succession de deux branches est appelée un chemin.
Chaque chemin conduit à une issue.

Propriété (admise)

Dans une répétition d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue est le produit des probabilités rencontrées sur le chemin qui conduit à cette issue.



Exemple

L'issue (R ; V) a pour probabilité $P(R\ ;\ V) = 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}187\,5.$

Exemple : 3 page 325

→ Exercices 20 et 21 page 331

Exemple : 3 page 325

→ Exercices 20 et 21 page 331

Comment ça fonctionne ?

Dans les exemples 1 et 2, on prélève au hasard un bonbon dans un sachet contenant 40 % de bonbons à la fraise dont 30 % sont acidulés. Les bonbons qui ne sont pas à la fraise sont à la menthe et $\frac{9}{10}$ d'entre eux ne sont pas acidulés. On note respectivement A et F les événements « Le bonbon prélevé est acidulé » et « Le bonbon prélevé est à la fraise ».

Exemple 3 Notion d'épreuves identiques et indépendantes

Le lancer de deux dés équilibrés à six faces est assimilable à deux tirages au hasard d'une boule dans une urne contenant six boules, numérotées de 1 à 6, avec remise, c'est-à-dire à deux épreuves identiques et indépendantes. Ainsi, par exemple, la probabilité d'obtenir la suite de résultats : 1, puis 4 est $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Remarque : Ainsi, d'autres expériences aléatoires que des tirages « avec remise » peuvent être modélisées de la même façon.

Pour s'entraîner ➡ Exercices 20 et 21, p. 331

20 On tire deux cartes au hasard, successivement et avec remise dans un jeu de 32 cartes classique.

Soit les événements C « La première carte est un cœur » et F « La seconde carte est un roi, une dame ou un valet ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant cette situation.

2. Calculer $P(C \cap F)$ et $P(\bar{C} \cap \bar{F})$.

21 On choisit au hasard et successivement deux personnes dans une population composée de 10 % de gauchers. On suppose cette population suffisamment nombreuse pour assimiler ces choix à deux tirages avec remise.

Soit les événements G_1 « La première personne est gauchère » et G_2 « La seconde personne est gauchère ».

À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité de l'événement « Une seule de ces deux personnes est gauchère ».

IV. Probabilités totales

Définition

Une partition de l'univers Ω est un ensemble d'évènements incompatibles deux à deux incompatibles (disjoints), et dont la réunion est Ω.

Autrement dit : Soient $A_1 , A_2 , \dots , A_n$ n évènements de probabilités non nulles.

$A_1 , A_2 , \dots , A_n$ forment une partition de l'univers Ω si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- Pour $i \neq j$ tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $\boldsymbol{A_i} \cap \boldsymbol{A_j} = \emptyset$ (deux à deux disjoints).
- $\boldsymbol{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega}$

Exemple : 1 page 325

→ Exercices 18 et 19 page 330

Exemple : 1 page 325
→ Exercices 18 et 19 page 330

Comment ça fonctionne ?

Dans les exemples 1 et 2, on prélève au hasard un bonbon dans un sachet contenant 40 % de bonbons à la fraise dont 30 % sont acidulés. Les bonbons qui ne sont pas à la fraise sont à la menthe et $\frac{9}{10}$ d'entre eux ne sont pas acidulés. On note respectivement A et F les événements « Le bonbon prélevé est acidulé » et « Le bonbon prélevé est à la fraise ».

▶ Exemple 1 Partition de l'univers

Dans cette expérience, on peut considérer les partitions $\{A, \overline{A}\}$ ou bien $\{F, \overline{F}\}$. Les trois données numériques de l'énoncé se traduisent par $P(F)=\frac{40}{100}=0,4$, $P_F(A)=0,3$ et $P_{\overline{F}}(\overline{A})=0,9$.

Comme $P(F)$ est connue, contrairement à $P(A)$, on choisit la partition $\{F, \overline{F}\}$ comme partition de l'univers.

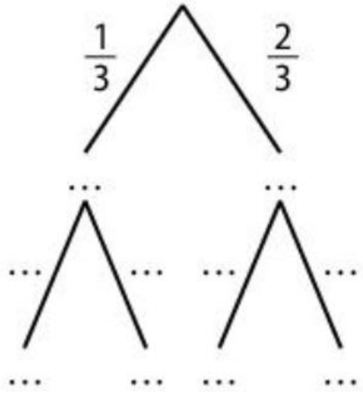
Pour s'entraîner ➥ Exercices 18 p. 330 et 19 p. 331

Exemple : 1 page 325

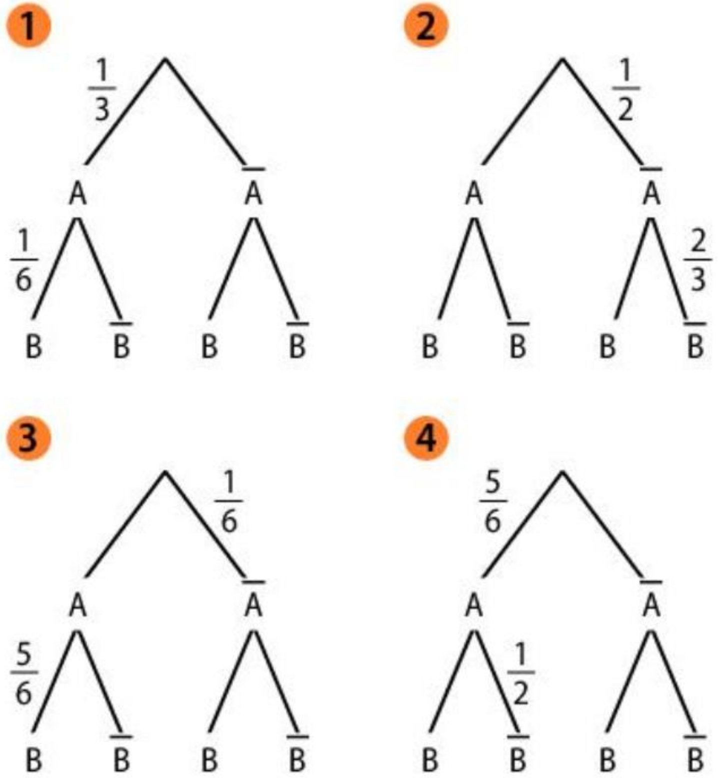
→ Exercices 18 et 19 page 330

Utiliser un arbre pondéré

18 On lance deux fois un dé cubique équilibré dont une face est numérotée 1, deux faces numérotées 2 et trois faces numérotées 3. Soit M l'événement « On a obtenu moins de deux fois le numéro 2 ». Décrire l'événement contraire de M, puis en s'aidant de l'arbre ci-contre, calculer $P(\overline{M})$, puis $P(M)$.



19 On lance deux fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Chacun des quatre arbres ci-dessous modélise une situation où A est le résultat du premier lancer et B celui du second lancer.



1. Associer à chaque arbre une paire $\{A, B\}$, en précisant A et B, chacun étant choisi parmi les événements suivants :
- « Le résultat est pair » ;
- « Le résultat est différent de 1 » ;
- « Le résultat est un multiple de 3 » ;
- « Le résultat est 6 ».

2. Recopier et compléter ces arbres puis, dans chaque cas, calculer $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Propriété – Formule des probabilités totales (Dem à l'exo 27 page 326)

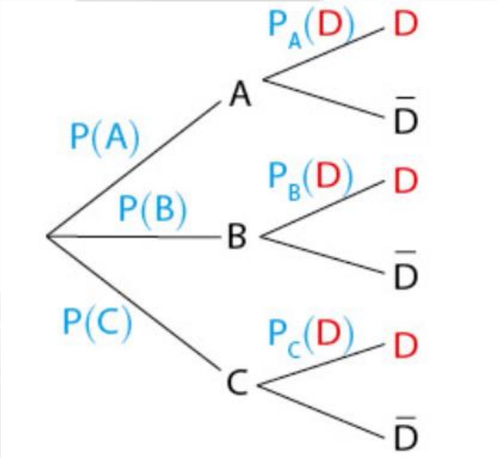
On considère $A_1, A_2, \dots, A_n$ n évènements de probabilités non nulles formant une partition de l'univers Ω.

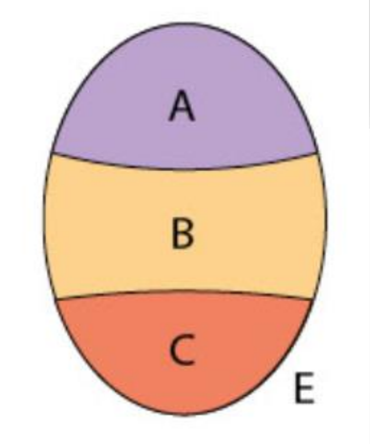
Pour tout évènement B, on a :

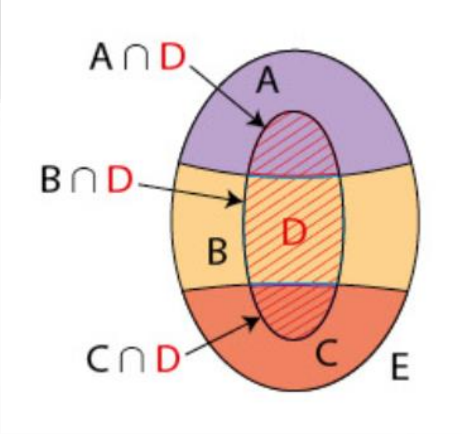
$$\boldsymbol{P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)}$$

c'est à dire $\boldsymbol{P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)}$

Exemple avec 3 événements A, B et C incompatibles







Exemple : 2 page 325
→ Exercices 18 et 19 page 330

Ainsi $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D)$

Donc $P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D)$

Ainsi, on peut calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.

Exemple : 2 page 325

→ Exercices 18 et 19 page 330

Comment ça fonctionne ?

Dans les exemples 1 et 2, on prélève au hasard un bonbon dans un sachet contenant 40 % de bonbons à la fraise dont 30 % sont acidulés. Les bonbons qui ne sont pas à la fraise sont à la menthe et $\dfrac{9}{10}$ d'entre eux ne sont pas acidulés. On note respectivement A et F les événements « Le bonbon prélevé est acidulé » et « Le bonbon prélevé est à la fraise ».

▶ Exemple 2 Formule des probabilités totales et règle de la somme

L'objectif est de calculer la probabilité que le bonbon prélevé soit acidulé, soit $P(\mathrm{A})$. En pratique, on peut construire un arbre pondéré illustrant les données, compte tenu du choix de la partition $\{\mathrm{F}, \bar{\mathrm{F}}\}$. D'après la règle de la somme, on a $P(\bar{\mathrm{F}}) = 1 - P(\mathrm{F}) = 0{,}6$. De même, $P_{\mathrm{F}}(\bar{\mathrm{A}}) = 1 - P_{\mathrm{F}}(\mathrm{A}) = 0{,}7$ et $P_{\bar{\mathrm{F}}}(\mathrm{A}) = 1 - P_{\bar{\mathrm{F}}}(\bar{\mathrm{A}}) = 0{,}1$.