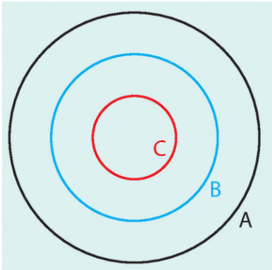
Proportions et évolution en pourcentages

I. Proportion de proportion



Propriété - Proportions d'ensembles emboités

On considère trois ensembles A, B et C emboités tels que ………………
On note p la proportion de la population de B dans la population de A.
On note p' la proportion de la population de C dans la population de B.
Alors la proportion de la population de C dans la population A est égale à ……….

Exemple

La moitié des pages d'un magazine est constituée de publicités.
Parmi celles-ci, 25 % sont consacrées à la mode.
Ici, A est l'ensemble ……… …………………, B est l'ensemble ………………………. et C est l'ensemble ………………………………………
La proportion des pages de publicités de mode parmi toutes les pages du magazine est donc de :

… … … … … … … … … … … … … … ….

Remarque

Une proportion peut s'écrire sous forme de fraction, sous forme décimale ou sous forme de pourcentage.
Ainsi, la proportion de l'exemple précédent peut s'écrire :

- sous forme de fraction : $p =$ … … .. ou $p =$ … … .. sous forme irréductible ;
- sous forme décimale : $p =$ … … …. ;
- sous forme de pourcentage : $p =$ … … … … ..

II. Évolutions en pourcentage

Définitions - Variations absolue et relative

On suppose qu'une quantité passe d'une valeur de départ V_D à une valeur d'arrivée V_A .
La **variation absolue** est … … … … …
La **variation relative**, ou taux d'évolution, est … … … … … …
Ainsi, la variation relative indique ce que représente la variation absolue par rapport à la valeur de ……………………..

Exemple

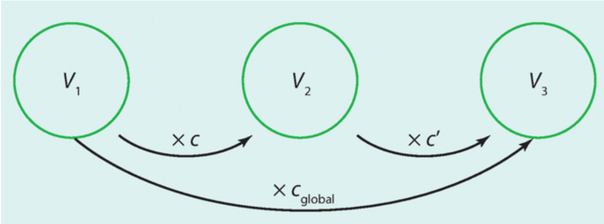
La population d'une ville passe de 55 000 à 74 250 habitants.
La variation absolue de cette population est de … … … … … … … … … … … … … … ….
La variation relative est de … … … … … … … … … … … … … … …

Remarque

Dans l'exemple précédent, le taux d'évolution de 55 000 à 74 250 est de 35 %, cela veut dire 35 que … … … … … … … … … … … … … où … … … … … … … … .. est appelé le coefficient ……………………..
Réciproquement, comme … … … … . = 1,35 on peut trouver directement le taux d'évolution à partir du coefficient multiplicateur en calculant … … … … … … … … … .. soit 35 %.

Définition - Évolutions successives

Lorsque l'on a une évolution d'une valeur V_1 à une valeur V_2 suivie d'une autre évolution de la valeur V_2 à une valeur V_3, le taux d'évolution global associé à ces deux évolutions est le taux d'évolution entre V_1 et V_3.
Son coefficient multiplicateur est appelé .... et est égal à … … … .. où c (respectivement c') est le coefficient multiplicateur de la première (respectivement de la seconde) évolution.

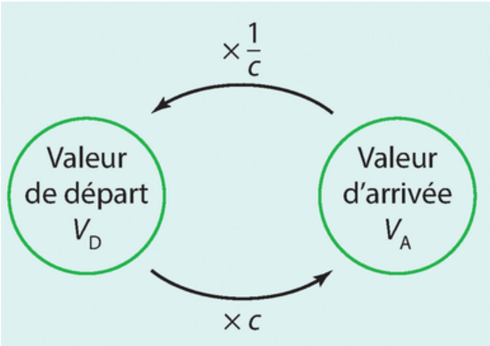


Exemple

Le nombre d'abonnés d'un journal en ligne augmente de 30 % avant de baisser de 10 %.
Il est donc multiplié par … … …. puis par .... Alors $c_{global} = \cdots$ … … … … … … … … … … .. ; cela correspond à un taux de … … … … … … … … … … ….
Le taux d'évolution global est donc $t_{global} =$ … … … … … … … … … … … … … … ..

Définition - Évolution réciproque

Lorsqu'on a une évolution d'une valeur V_D à une valeur V_A, le taux réciproque est le taux permettant de revenir de … … … … … … Son coefficient multiplicateur est appelé ....
.... et est égal à .... où c est le coefficient multiplicateur de l'évolution de ....



Exemple

Un prix augmente de 25 % : il a donc été multiplié par … … … … … … … … … ..
Le coefficient multiplicateur réciproque qui permettrait de revenir au prix de départ est de :
… … … … …
Or … … … … … … … … … … … …. ce qui correspond donc à une baisse de ....

III. Résumés statistiques

Définition

La **moyenne pondérée** de la série statistique ci-contre est le nombre réel, noté $\bar{x}$, tel que :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_px_p}{N}$$

Valeur	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

Effectif total : $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$

Exemple

Audrey prend souvent le train venant de Rouen en direction de Paris. En rentrant dans le wagon, elle compte le nombre de places assises disponibles.
Après 10 trajets, elle obtient les résultats ci-contre.

Valeur	0	1	2	5
Effectif	5	1	3	1

Le nombre moyen de places assises disponibles sur ces 10 trajets est :

$$\bar{x} = \frac{5 \times 0 + 1 \times 1 + 3 \times 2 + 1 \times 5}{5 + 1 + 3 + 1} = \frac{11}{20} = 0{,}55$$

Remarque

Dans la propriété précédente, en posant $N \;=\; n_1 + n_2 + \ldots + n_p$, on obtient :

la fréquence de x_1 , $f_1 = \frac{effectif\ de\ x_1}{effectif\ total} = \frac{n_1}{N}$ puis celle de x_2 : $\frac{n_2}{N}$ etc…

On en déduit la formule $\bar{x} = \frac{n_1x_1}{N} + \frac{n_2x_2}{N} + \cdots + \frac{n_px_p}{N} = x_1\frac{n_1}{N} + \cdots + x_p\frac{n_p}{N} = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_px_p$

On considère une série de moyenne .

• Si on multiplie toutes les valeurs d’une série par un nombre a alors la moyenne est multipliée par a.

• Si on ajoute le même nombre b à toutes les valeurs de la série alors cette valeur b s’ajoute à la moyenne .

Cours

Résumés statistiques

a Moyenne et écart type

Définition La moyenne d'une série, notée $\overline{x}$, est le quotient de la somme de toutes les valeurs de la série par l'effectif total.

Si une série est donnée par son tableau d'effectifs, on a $\overline{x} = \dfrac{x_1 \times n_1 + x_2 \times n_2 + \ldots + x_p \times n_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}$.

Valeurs	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

Propriété On considère une série de moyenne $\overline{x}$.

- Si on multiplie toutes les valeurs d'une série par un nombre a alors la moyenne $\overline{x}$ est multipliée par a.
- Si on ajoute le même nombre b à toutes les valeurs de la série alors cette valeur b s'ajoute à la moyenne $\overline{x}$.

Exemple

On donne la série suivante.

Valeur	5	8	10
Eff.	1	2	2

La moyenne $\overline{x}$ est égale à :

$$\overline{x} = \frac{5 \times 1 + 8 \times 2 + 10 \times 2}{1+2+2} = 8,2$$

On multiplie toutes les valeurs de série par 2 et on ajoute 1.
La série devient :

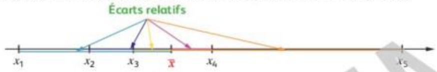
Valeur	11	17	21
Eff.	1	2	2

La nouvelle moyenne $\overline{x'}$ vaut :

$$\overline{x'} = 2 \times \overline{x} + 1 = 17,4$$

Voir démonstration p. 315

Pour mesurer la dispersion des valeurs d'une série par rapport à la moyenne, on prend en compte l'écart relatif de chaque valeur à la moyenne.



Définition Soit la série de N valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_N$ de moyenne $\overline{x}$.

- La variance V de la série est la moyenne des carrés des écarts des valeurs avec la moyenne : $V = \dfrac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_N - \overline{x})^2}{N}$
- L'écart type σ de la série est la racine carrée de la variance $\sigma = \sqrt{V}$.

Exemple

Soit la série 5 ; 8 ; 8 ; 10 ; 10 de moyenne 8,2.
La variance V est égale à :

$$\frac{(5-8,2)^2 + (8-8,2)^2 + \ldots + (10-8,2)^2}{5} = 3,36$$

L'écart type est égal à :

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{3,36} = 1,83$$

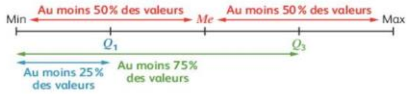
Remarque

Le couple $(\overline{x}, \sigma)$ permet de résumer une série.
Il a l'avantage d'utiliser toutes les valeurs de la série, en ce sens il est représentatif de la série. Il a l'inconvénient d'être « sensible » aux valeurs extrêmes.

b Médiane et écart interquartile

La médiane Me permet de partager en deux une série rangée dans l'ordre croissant. Pour la partager en quatre, on utilise les quartiles.

Définition Le premier quartile (resp. le troisième) de la série, noté Q_1 (resp. Q_3), est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % (resp. 75 %) des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.



Propriété On appelle écart interquartile, le nombre $Q_3 - Q_1$.

Remarque

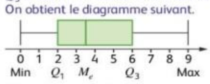
Le couple $(Me, Q_3 - Q_1)$ permet de résumer une série. Il a l'avantage de posséder une représentation graphique (diagramme en boite) et de ne pas être sensible aux valeurs extrêmes.

Exemple

Soit la série ordonnée suivante.
0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4
4 ; 4 ; 4 ; 5 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 9
Eff_{total} est égal à 22 et est pair donc la médiane est la moyenne de la 11ᵉ et de la 12ᵉ valeur de la série.

$$Me = \frac{3+4}{2} = 3,5$$

Position de Q_1 : $22 \times 0,25 = 5,5$
Q_1 est la 6ᵉ valeur de la série soit 2.
Position de Q_3 : $22 \times 0,75 = 16,5$
Q_3 est la 17ᵉ valeur de la série soit 6.
On obtient le diagramme suivant.



L'écart interquartile est :

$$Q_3 - Q_1 = 6 - 2 = 4$$

Si une série est donnée par son tableau d'ef-
-8,2
On multiplie toutes les valeurs de
série par 2 et on ajoute 1.
• Si on multiplie toutes les valeurs d'une série par un nombre a alors la
moyenne est multipliée par a.
• Si on ajoute le même nombre b à toutes les valeurs de la série alors cette
valeur b s'ajoute à la moyenne ï.
Pour mesurer la dispersion des valeurs d 'une série par rapport à la moyenne,
on prend en compte l'écart relatif de chaque valeur à la moyenne.
Écarts relatifs

Définition
Soit la série de N valeurs XI, x2, ...,XN de moyenne ï.
• La variance Vde la série est la moyenne des carrés des écarts des valeurs
2
avec la moyenne : V =
IV
• L'écart type de la série est la racine carrée de la variance = UV.
Remarque
Le couple (ï, o) permet de résumer une série.
Il a l'avantage d'utiliser toutes les valeurs de la série, en ce sens il est
représentatif de la série. Il a I 'inconvénient d'être « sensible » aux valeurs
extrêmes.
Médiane et écart interquartile
La médiane Me permet de partager en deux une série rangée dans l'ordre

croissant. Pour la partager en quatre, on utilise les quartiles.
Définitions
Le premier quartile (resp. le troisième) de la série, noté QI
(resp. (23), est la plus petite valeur de la série telle qu'au moins 25 % (resp.
75 %) des valeurs de la série lui soient inférieures ou égales.
Au moins des valeurs
Au moins 50 % des valeurs
La série devient :
Valeur
11
17
2
21
Eff.
1
Min
QI
Me
Max
La nouvelle moyenne x' vaut :
Vulr démonsuation p. 315
Exemple
Soit la série 5 8 ; 10 ; 10 de
moyenne 8,2.
La variance V est égale à :
5
= 3,36
L 'écart type est égal à :
Exemple
Soit la série ordonnée suivante.
Efftotal est égal à 22 et est pair donc
la médiane est la moyenne de la
I le et de la 12e valeur de la série.
2
Position de QI : 5,5
QI est la 6e valeur de la série soit 2.
Position de : 22x0,75=16,5
(23 est la 17e valeur de la série soit 6.
On obtient le diagramme suivant.
Au moins 75%
Au moins 25 %
des valeurs
des valeurs
Propriété
On appelle écart interquartile, le nombre (23 — QI.
Remarque
Le couple (Me, Q3 — QI) permet de résumer une série. Il a l'avantage de
posséder une représentation graphique (diagramme en boite) et de ne
pas être sensible aux valeurs extrêmes.
0123456
Min QI Me Q3

L 'écart interquartile est :
789
Max