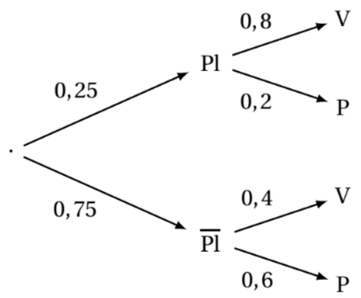
Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°2 Durée 1h50 mn	29 octobre 2019

Exercice 1 (5 points)

Pour chacune des trois affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre. Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas. Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6.

Affirmation 1 : « Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »



Pl : il pleut ; V : en voiture ; P : à pied

On cherche $p(V)$:

$$p(V) = p(V \cap \text{Pl}) + p\left(V \cap \overline{\text{Pl}}\right) = p_{\text{Pl}}(V) \times p(\text{Pl}) + p_{\overline{\text{Pl}}}(V) \times p(\overline{\text{Pl}})$$
$$= 0{,}8 \times 0{,}25 + 0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}5$$

Zoé utilise la voiture un jour sur deux.

Affirmation VRAIE

2. Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B.

Affirmation 2 : « Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants. »

A et B sont indépendants signifie que $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$:

$$p(A) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) \times p(B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)$$
$$\Leftrightarrow p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A) \times p(B) = p(A)(1 - p(B)) = p(A) \times p(\overline{B})$$

Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants.

Affirmation VRAIE

3. On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin A+. On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang. On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin A+.

Affirmation 3 : « On ne peut pas rejeter, au seuil de 5%, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39% comme dans l'ensemble de la population. »

La proportion de personnes de groupe sanguin A+ dans la population française est $p = 0{,}39$.

La taille de l'échantillon est $n = 183 \geqslant 30$;

$np = 183 \times 0{,}39 = 71{,}37 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 183 \times (1 - 0{,}39) = 111{,}63 \geqslant 5$.

Donc on peut déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 5 % de la proportion de personnes ayant un groupe sanguin A+:

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}39 - \frac{1}{\sqrt{183}}\ ;\ 0{,}39 + \frac{1}{\sqrt{183}}\right] \approx [0{,}316\ ;\ 0{,}464]$$

$0{,}34 \in I$ donc on ne peut pas rejeter, au seuil de 5%, l'hypothèse.

Affirmation VRAIE

Exercice 2 (8 points) Asie juin 2013 (extrait)

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

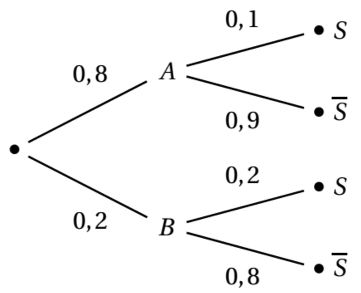
10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».
-

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

Le grossiste a deux fournisseurs et il y a dans chaque boîte des traces de pesticides ou non. On a donc un arbre 2×2 :



2. ***a.*** Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap \overline{S}$?

En suivant la quatrième branche : $p(B \cap \overline{S}) = p(B) \times p_B(\overline{S}) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$.

b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à $0,88$.

On calcule de même : $p(A \cap \overline{S}) = p(A) \times p_A(\overline{S}) = 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}72$.

La formule des probabilités totale, nous permet d'écrire que :

$$p(\overline{S}) = p(A \cap \overline{S}) + p(B \cap \overline{S}) = 0{,}72 + 0{,}16 = 0{,}88$$

3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Il faut donc calculer : $p_S(B) = \frac{p(S \cap B)}{p(S)}$.

On a vu que $p(\overline{S}) = 0{,}88$, donc $p(S) = 1 - p(\overline{S}) = 0{,}12$.

Donc $p_S(B) = \frac{0{,}2 \times 0{,}2}{0{,}12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$ au centième près.

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans traces de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

On a vu que la probabilité de tirer une boîte de façon aléatoire dans le stock du grossiste sans trouver de pesticides est égale à 0,88. C'est une épreuve de Bernoulli.
On répète de façon indépendante 10 fois cette expérience la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}88$.

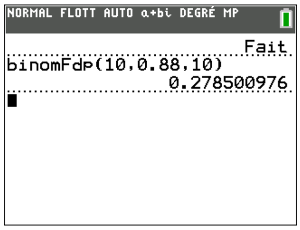
$X \leadsto \mathcal{B}(10\,;0{,}88)$ et pour $0 \leq k \leq 10$, $P(X = k) = \binom{10}{k} 0{,}88^k \times (1 - 0{,}88)^{10-k}$

2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

Il faut trouver $p(X = 10)$

$\mathrm{P}(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0{,}88^{10} \times (1 - 0{,}88)^{10-10} = 0{,}88^{10} \approx 0{,}28$ au centième près.

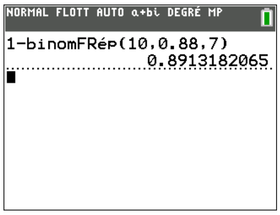
Remarque : on peut donner directement le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice.



3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Il faut trouver $P(X \geq 8)$.

$p(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 0{,}89$ au centième près.



Exercice 3 (8 points) Métropole Sept 2016

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
a, b, d, s sont des entiers
i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
a ← 0
b ← 0
Saisir n
Pour i allant de 1 à n faire
        d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6
        Si d ≤ 2 alors
                a ← 1 − a
        Sinon
                Si d ≤ 4 alors
                        b ← 1 − b
                Fin Si
        Fin Si
        s ← a + b
Fin Pour
Afficher s
```

(a) On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation			**0**	**0**	
1er passage boucle Pour	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
2e passage boucle Pour	**2**	**6**	**1**	**0**	**1**
3e passage boucle Pour	**3**	**4**	**1**	**1**	**2**

(b) Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

Les variables a et b sont à 0 ou 1 selon que la pièce montre le côté face ou le côté pile; la variable $s = a + b$ donne donc le nombre de pièces qui sont du côté pile.

À la fin de cet algorithme, $s = 2$ donc les deux pièces sont du côté pile.

2. Pour tout entier naturel n, on note :

- X_n l'évènement : « à l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « à l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « à l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

  De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

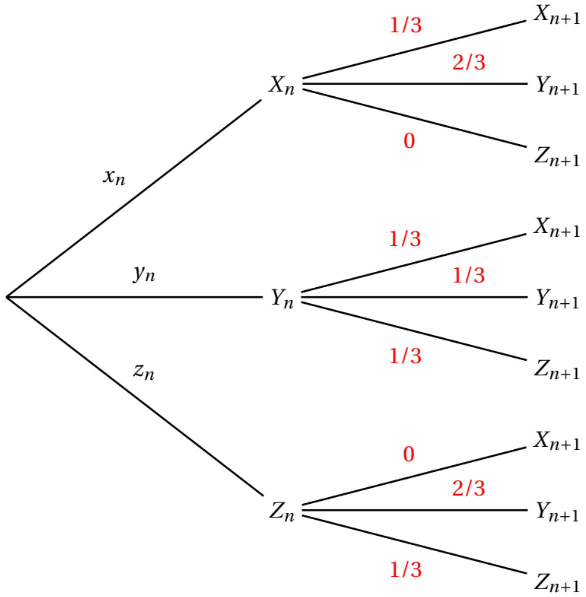
(a) Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

Au début du jeu les deus pièces sont du côté face donc $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

(b) Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

X_{n+1} est l'événement à l'issue de $n + 1$ lancers de dés, les deux pièces sont du côté face; on cherche donc la probabilité que, à l'issue de $n + 1$ lancers, les deux pièces soient du côté face sachant qu'à l'issue de n lancers elles étaient déjà les deux du côté face. Il faut donc qu'il n'y ait aucun retournement de pièce lors du $n + 1$-ième lancer, c'est-à-dire qu'il faut que le dé tombe sur 5 ou 6; la probabilité de l'événement $\{5; 6\}$ est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ puisque le dé est bien équilibré et donc qu'il y a équiprobabilité. Donc $P_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

(c) Compléter l'arbre ci-dessous en donnant les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles.



(d) Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

Pour tout entier naturel n, $x_n + y_n + z_n = 1$ donc $z_n = 1 - x_n - y_n$.

(e) En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}$.

$$y_{n+1} = P(Y_{n+1}) = P(X_n \cap Y_{n+1}) + P(Y_n \cap Y_{n+1}) + P(Z_n \cap Y_{n+1}) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}z_n$$
$$= \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}(1 - x_n - y_n) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_n - \frac{2}{3}y_n = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}$$

(f) On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \frac{1}{2}$.

Montrer que la suite (b_n) est géométrique.

$$b_{n+1} = y_{n+1} - \frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}\left(y_n - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}b_n$$
$$b_0 = y_0 - \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q = -\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = -\frac{1}{2}$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

On peut donc dire que, pour tout n, $b_n = b_0 \times q^n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

Comme $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, on en conclut que, pour tout n, $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

(g) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

Interpréter le résultat.

La suite (b_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$; comme $-1 < -\frac{1}{3} < 1$, on sait que la suite (b_n) est convergente vers 0.

Or, pour tout n, $y_n = b_n + \frac{1}{2}$, donc la suite (y_n) est convergente vers $\frac{1}{2}$: $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \frac{1}{2}$.

Donc à long terme, la probabilité d'avoir une pièce côté face et une pièce côté pile va tendre vers 0,5.