Durée : 3 heures

SPÉCIALITÉ

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (8 points)

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016.
Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$. On a donc $v_0 = 12$.

1. Calculer v_1 puis v_2.
2. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
3. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x.$$
(a) Justifier que g est croissante sur [0 ; 60].
(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
(a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
(b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 60$.
(c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
(d) En déduire la convergence de la suite (u_n).
(e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$.
En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
Il utilise l'algorithme suivant.

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 12$
$Tant\ Que$ … …
    $u \leftarrow$ … … … ..
    $n \leftarrow$ … … … ..
$Fin\ Tant\ Que$
$Afficher$ … … …

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.
Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de r.

Exercice 2 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes 1, z^2 et $\frac{1}{z}$ soient alignés.
Sur le graphique fourni en annexe, le point A a pour affixe 1.

Partie A: étude d'exemples

1. **Un premier exemple**

Dans cette question, on pose $z = \mathrm{i}$.
(a) Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.
(b) Placer les points N_1 d'affixe z^2, et P_1 d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
On remarque que dans ce cas les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.

2. **Une équation**

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2 + z + 1 = 0$.

3. **Un deuxième exemple**

Dans cette question, on pose : $z = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(a) Déterminer les formes algébriques des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.
(b) Placer les points N_2 d'affixe z^2 et P_2, d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
On remarque que dans, ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

Soit z un nombre complexe non nul.
On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\frac{1}{z}$.

1. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a :

$$z^2 - \frac{1}{z} = (z^2 + z + 1)\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

2. On rappelle que si, $\overrightarrow{U}$ est un vecteur non nul et $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixes respectives $z_{\vec{U}}$ et $z_{\vec{V}}$, les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $z_{\vec{V}} = kz_{\vec{U}}$.
En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y désignent des nombres réels.
Justifier que :

$$z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$$

4. (a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.

(b) Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

Exercice 3 de spécialité (6 points)

Partie A

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
*Il est attribué **un point par réponse** exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

Affirmation 1 : Soit x un entier.
« $x^2 + x + 3 \equiv 0 \ (modulo\ 5)$ si et seulement si $x \equiv 1\ (modulo\ 5)$. »

Affirmation 2 : n est un entier naturel.
« Si un entier naturel a divise les entiers $n^2 + 5n + 17$ et $n + 3$, alors a divise 11.

Affirmation 3 : n est un entier naturel.
« Le reste de la division euclidienne de $(n+2)^3$ par n^2 est $12n + 8$ »

Affirmation 4 :
« 2018^{2019} est divisible par 7 »

Partie B

On considère l'équation notée (G) :

$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Montrer que $100 \equiv 2$ (modulo7).
Démontrer que si $(x\,;y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n$ (modulo7).

2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de $3x^2$ par 7.							

3. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.
En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.

Question Bonus

Montrer que le nombre $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire comme quotient de deux entiers.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

NOM :	Prénom :

Exercice 2