Exercice 1 (8 points) Am du Sud Nov 2017

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016.
Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$. On a donc $v_0 = 12$.

1. Calculer v_1 puis v_2.

$$v_1 = v_0 + 5\% \times v_0 = (1 + 5\%) \times v_0 = 1{,}05 \times v_0 = 12{,}6$$
$$v_2 = v_1 + 5\% \times v_1 = (1 + 5\%) \times v_1 = 1{,}05 \times v_1 = 13{,}23$$

2. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.

D'après l'énoncé et la question ***1.*** , $v_{n+1} = 1{,}05 \times v_n$ ce qui signifie que la suite est géométrique de raison $q = 1{,}05$ et de premier terme $v_0 = 12$.
On en déduit que, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 12 \times 1{,}05^n$.

3. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Il faut regarder si ce modèle permet de limiter la population à 60 000 individus.
La raison q est stictement supérieure à 1 et $v_0 > 0$, la suite est donc strictement croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
Il existe donc un rang n à partir duquel $v_n > 60000$: le rang 33.
En 2049 la population aura dépassé 60 000 individus.

X	Y1
28	47.042
29	49.394
30	51.863
31	54.456
32	57.179
33	60.038
34	63.04

X=33

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1{,}1}{605}u_n^2 + 1{,}1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1x.$$

(a) Justifier que g est croissante sur [0 ; 60].

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -\frac{1{,}1}{605} \times 2x + 1{,}1 = -\frac{2{,}2}{605}x + 1{,}1$.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2{,}2}{605}x + 1{,}1 > 0 \Leftrightarrow 1{,}1 > \frac{2{,}2}{605}x \Leftrightarrow \frac{1{,}1 \times 605}{2{,}2} > x \Leftrightarrow x < 302{,}5$$

Donc $g'(x) > 0$ sur $[0; 60]$ donc g est croissante sur $[0; 60]$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

$$g(x) = x \Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 1{,}1x = x \Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2 + 0{,}1x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1{,}1}{605}x + 0{,}1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ x = 0 \text{ ou } -\frac{1{,}1}{605}x + 0{,}1 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0 \text{ ou } 0{,}1 = \frac{1{,}1}{605}x \ \Leftrightarrow\ \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 55}$$

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.

(a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.

$$u_1 = g(u_0) = g(12) \approx 12{,}938$$

Avec ce modèle, on peut estimer la population à 12938 individus en 2017.

(b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 60$.

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $0 \leq u_n \leq 60$.

* **Initialisation**

Pour $n = 0$, $u_0 = 12$ et $0 \leq 12 \leq 60$ donc la propriété est vraie au rang 0.

* **Hérédité**

On suppose que le propriété est vraie au rang $n \geq 0$, c'est-à -dire que $0 \leq u_n \leq 60$; c'est l'hypothèse de récurrence.

Or $0 \in [0\,;60]$ et $60 \in [0\,;60]$; de plus on sait que le fonction g est croissante sur $[0;60]$ donc de $0 \leq u_n \leq 60$, on peut déduire que $g(0) \leq g(u_n) \leq g(60)$.

$g(0) = 0$ et $g(60) \approx 59{,}4 \leq 60$; de plus, $g(u_n) = u_{n+1}$.

On obtient alors $0 \leq u_{n+1} \leq 60$ et on a donc démontré que la propriété était vraie au rang $n + 1$.

* **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$
D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 0$.
On a donc démontré par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 60$.

(c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1{,}1}{605}u_n^2 + 1{,}1u_n - u_n = -\frac{1{,}1}{605}u_n^2 + 0{,}1u_n = u_n\left(-\frac{1{,}1}{605}u_n + 0{,}1\right) = \frac{1{,}1}{605}u_n(55 - u_n)$$

En utilisant le raisonnement utilisé à la question précédente (comme $g(55) = 55$) , on montre que $0 \leq u_n \leq 55$, donc $55 - u_n \geq 0$ et $\frac{1{,}1}{605}u_n(55 - u_n) \geq 0$.

On a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n donc la suite (u_n) est croissante.

(d) En déduire la convergence de la suite (u_n).

La suite (u_n) est croissante et majorée par 60 donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

(e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$.
En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$ donc elle est solution de l'équation $g(x) = x$.
L'équation $g(x) = x$ n'admet que 2 solutions: 0 et 55.
La suite (u_n) est croissante et $u_0 = 12$ donc la limite ℓ de la suite est supérieure ou égale à 12.
On en déduit donc que $\ell = 55$ ce qui signifie que, selon ce modèle, la population va tendre vers 55 000 individus.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
Il utilise l'algorithme suivant.

$$\begin{array}{l}
n \leftarrow 0 \\
u \leftarrow 12 \\
Tant\ Que\ \boldsymbol{u} < \mathbf{50} \\
\qquad u \leftarrow \ \mathbf{1,1}\boldsymbol{u} - \dfrac{\mathbf{1,1}}{\mathbf{605}}\boldsymbol{u}^{\mathbf{2}} \\
\qquad n \leftarrow \ \boldsymbol{n} + \mathbf{1} \\
Fin\ Tant\ Que \\
Afficher\ \boldsymbol{n}
\end{array}$$

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.
Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de r.
On trouve $n = 36$ à l'aide de la calculatrice (programmation ou utilisation du tableau).
Ci-dessous un script Python :

```
from math import*
n=0
u=12
while u<50:
    u=1.1*u-(1.1/605)*u*u
    n=n+1
print("La valeur de n est égale à",n)
```

```
>>> (executing lines 1 to 7 of
"def L.py")
La valeur de n est égale à 36

>>>
```

Exercice 2 (6 points) Pondichéry Juin 2019

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.
Le but de cet exercice est de déterminer les nombres complexes z non nuls tels que les points d'affixes 1, z^2 et $\frac{1}{z}$ soient alignés.
Sur le graphique fourni en annexe, le point A a pour affixe 1.

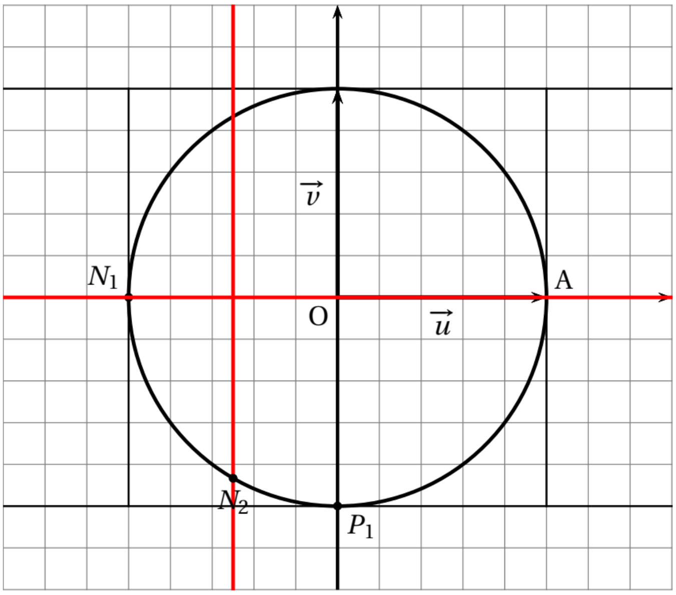
Partie A: étude d'exemples

1. Un premier exemple

Dans cette question, on pose $z = \mathrm{i}$.
(a) Donner la forme algébrique des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

$z = \mathrm{i}$ donc $z^2 = i^2 = -1 = \boxed{-1+0i}$ et $\frac{1}{z} = \frac{1}{i} = -i = \boxed{0-i}$.

(b) Placer les points N_1 d'affixe z^2, et P_1 d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.
On remarque que dans ce cas les points A, N_1 et P_1 ne sont pas alignés.



2. Une équation

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2+z+1=0$.

Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes l'équation d'inconnue z : $z^2+z+1=0$:

$\Delta=-3<0$ donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}$ d'où

$\boxed{z_1=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{z_2=\overline{z_1}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$

3. Un deuxième exemple

Dans cette question, on pose : $z=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(a) Déterminer les formes algébriques des nombres complexes z^2 et $\frac{1}{z}$.

$$z^2=\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=\boxed{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{2}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{2\times\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)\times\left(-1-i\sqrt{3}\right)}=\frac{2\times\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{4}=\boxed{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(b) Placer les points N_2 d'affixe z^2 et P_2, d'affixe $\frac{1}{z}$ sur le graphique donné en annexe.

On remarque que dans, ce cas les points A, N_2 et P_2 sont alignés.

Partie B

Soit z un nombre complexe non nul.

On note N le point d'affixe z^2 et P le point d'affixe $\frac{1}{z}$.

1. Établir que, pour tout nombre complexe différent de 0, on a : $z^2-\frac{1}{z}=(z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right)$.

Pour tout $z\neq 0$,

$$\begin{aligned}(z^2+z+1)\left(1-\frac{1}{z}\right) &= z^2+z+1-\frac{1}{z}(z^2+z+1)\\ &= z^2+z+1-\left(z+1+\frac{1}{z}\right)\\ &= z^2+z+1-z-1-\frac{1}{z}\\ &= z^2-\frac{1}{z}\end{aligned}.$$

2. On rappelle que si, $\overrightarrow{U}$ est un vecteur non nul et $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixes respectives $z_{\vec{U}}$ et $z_{\vec{V}}$, les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel k tel que $z_{\vec{V}} = kz_{\vec{U}}$.
En déduire que, pour $z \neq 0$, les points A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

Pour $z \neq 0$, on a : $\overrightarrow{PN}$ a pour affixe $\left(z^2 - \frac{1}{z}\right)$ et $\overrightarrow{PA}$ a pour affixe $\left(1 - \frac{1}{z}\right)$.

$\overrightarrow{PN}$ est colinéaire à $\overrightarrow{PA} \Leftrightarrow \ \exists k \in \mathbb{R},\ z^2 - \frac{1}{z} = k\left(1 - \frac{1}{z}\right)$ soit d'après le résultat précédent :

$$\Leftrightarrow\ (z^2 + z + 1)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = k\left(1 - \frac{1}{z}\right)$$
$$\Leftrightarrow\ (z^2 + z + 1 - k)\left(1 - \frac{1}{z}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ z^2 + z + 1 - k = 0\ \text{ ou }\ 1 - \frac{1}{z} = 0$$
$$\Leftrightarrow\ z^2 + z + 1 = k\ \text{ ou }\ z = 1$$

Or, si $z = 1$, $z^2 + z + 1 = 3 \in \mathbb{R}$.
Donc dans les deux cas $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$.
On a donc montré que N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est un réel.

3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y désignent des nombres réels.
Justifier que : $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$

On pose $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y désignent des nombres réels.
$z^2 + z + 1 = (x + \mathrm{i}y)^2 + x = \mathrm{i}y + 1 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy + x + \mathrm{i}y + 1 = \boxed{x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)}$.

4. (a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que les points A, N et P soient alignés.

A, N et P soient alignés si, et seulement si, $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$.

Or : $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2xy + y = 0 \Leftrightarrow y(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = 0\ \text{ ou }\ x = -\frac{1}{2}}$.

Les solutions appartiennent donc aux droites d'équations $\boxed{y = 0}$ et $\boxed{x = -\frac{1}{2}}$.

(b) Tracer cet ensemble de points sur le graphique donné en annexe.

z doit être non nul, donc l'ensemble cherché est l'axe des réels privé de l'origine et la droite d'équation

$x = -\frac{1}{2}$.

Exercice 3 de spécialité (6 points)

Partie A

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
*Il est attribué **un point par réponse** exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

Affirmation 1 : Soit x un entier.

« $x^2 + x + 3 \equiv 0 \ (modulo\ 5)$ si et seulement si $x \equiv 1\ (modulo\ 5)$. »

Utilisons un tableau de congruences modulo 5.

$x \equiv$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv$	0	1	4	4	1
$x + 3 \equiv$	3	4	0	1	2
$x^2 + x + 3 \equiv$	3	0	4	0	3

Conclusion : $x^2 + x + 3 \equiv 0\ (modulo\ 5)$ si et seulement si $x \equiv 1\ (modulo\ 5)$ ou $x \equiv 3\ (modulo\ 5)$
AFFIRMATION FAUSSE.

Affirmation 2 : n est un entier naturel.

« Si un entier naturel a divise les entiers $n^2 + 5n + 17$ et $n + 3$, alors a divise 11.

a divise les entiers $n^2 + 5n + 17$ et $n + 3$, il divise donc toute combinaison linéaire de $n^2 + 5n + 17$ et $n + 3$.
A l'aide d'une division on obtient facilement : $n^2 + 5n + 17 = (n+2)(n+3) + 11$ ou encore

$$n^2 + 5n + 17 - (n+2)(n+3) = 11$$

Par conséquent, si a divise $n^2 + 5n + 17$ et $n + 3$, il divise également 11.
AFFIRMATION VRAIE

Affirmation 3 : n est un entier naturel **non nul.**

« Le reste de la division euclidienne de $(n+2)^3$ par n^2 est $12n + 8$ »

On a $(n+2)^3 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = n^2(n+6) + 12n + 8$.
$12n + 8$ sera le reste de la division euclidienne de $(n+2)^3$ par n^2 si et seulement si $0 \leq 12n + 8 < n^2$

- La condition $12n + 8 \geq 0$ est immédiate puisque $n > 0$.
- Examinons la 2ème condition, à savoir, $12n + 8 < n^2$.
  On peut constater que pour $n = 1$ cette condition n'est pas vérifiée.
  Par conséquent l'affirmation n'est pas vraie pour tout entier naturel n non nul.

AFFIRMATION FAUSSE

Affirmation 4 :

« 2018^{2019} est divisible par 7 »

2018^{2019} est divisible par 7 $\Leftrightarrow$ $2018^{2019} \equiv 0\ (mod\ 7)$

$2018 = 7 \times 288 + 2$ donc $2018 \equiv 2\ (mod\ 7)$

On en déduit que $2018^{2019} \equiv 2^{2019}\ (mod\ 7)$

Comme $2^3 = 8$, on a $2^3 \equiv 1\ (mod\ 7)$ puis $(2^3)^{673} \equiv 1^{273}\ (mod\ 7)$ c'est-à-dire $2^{2019} \equiv 1\ (mod\ 7)$.

Conclusion : $2018^{2019} \equiv 1\ (mod\ 7)$ et 2018^{2019} n'est donc pas divisible par 7 .

AFFIRMATION FAUSSE.

Partie B – Extrait Nouvelle-Calédonie 2009

On considère l'équation notée (G) :

$3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Montrer que $100 \equiv 2 \ (\text{modulo}7)$.

$100 = 7 \times 14 + 2$ donc $100 \equiv 2 \ (\text{modulo}7)$.

Démontrer que si $(x\,;y)$ est solution de (G) alors $3x^2 \equiv 2^n \ (\text{modulo}7)$.
Si $(x\,;y)$ est solution de (G) alors $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n} \Leftrightarrow 3x^2 + 7y^2 = 100^{\mathrm{n}}$
Or $100^n \equiv 2^n \ (\text{modulo}7)$ donc $3x^2 + 7y^2 \equiv 2^n\ (modulo\ 7)$ et comme $7y^2 \equiv 0\ (modulo\ 7)$ on a bien $3x^2 \equiv 2^n \ (\text{modulo}7)$.

2. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division de x par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division de $3x^2$ par 7.	**0**	**3**	**5**	**6**	**6**	**5**	**3**

3. Démontrer que 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

On a :

$2^0 = 1 \equiv 1\ (modulo\ 7)$; $2^1 = 2 \equiv 2\ (modulo\ 7)$; $2^2 = 4 \equiv 4\ (modulo\ 7)$; $2^3 = 8 \equiv 1\ (modulo\ 7)$

et « ça recommence ».

Par conséquent, de trois choses l'une :

- $n = 3p, p \in N$; alors $2^{3p} = (2^3)^p = 8^p$. Or $8 \equiv 1 \text{ mod}7 \Rightarrow 8^p \equiv 1 \text{ mod}7$;
- $n = 3p + 1$; alors $2^{3p+1} = 2^{3p} \times 2 = 8^p \times 2$. Or $8 \equiv 1 \text{ mod}7 \Rightarrow 8^p \equiv 1\text{mod } 7 \Rightarrow 2^{3p} \times 2 \equiv 2\text{mod}7$;
- $n = 3p + 2$; alors $2^{3p+2} = 2^{3p} \times 2^2 = 4 \times 2^{3p} = 4 \times 8^p$. Comme $8^p \equiv 1\text{mod } 7{,}4 \times 8^p \equiv 4\text{mod}7$.

__**Conclusion :**__ 2^n est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.

En déduire que l'équation (G) n'admet pas de solution.
On vient de voir que les restes dans la division par 7 de 2^n ne sont pas les mêmes que ceux de la division de $3x^2$ par 7.
Donc $3x^2$ et 2^n ne peuvent être congrus modulo 7.
D'après le ***1.*** il n'y a donc pas de solution pour l'équation (G).

Question Bonus

Montrer que le nombre $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire comme quotient de deux entiers.