Fiche exercices (Sésamath page 65)

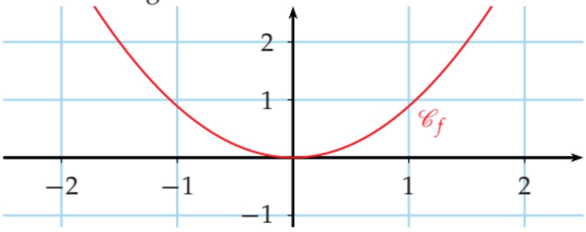
Limites : interprétation graphique

11 ► MÉTHODE 1 p. 58

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{x^2}{9}\right).$$

1) Conjecturer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ à partir de la représentation graphique ci-dessous obtenue à l'aide d'un logiciel.



2) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) Expliquer pourquoi la conjecture était erronée.

12 INFO

Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + x + 7}}$$

représentée par $\mathscr{C}$ dans un repère.

1) Donner l'ensemble de définition de la fonction g.

2) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

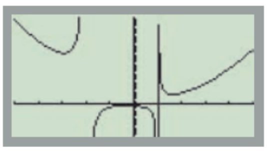
a) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

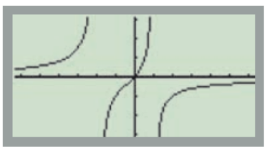
b) Conjecturer une valeur approchée de la limite en $+\infty$ de la fonction g.

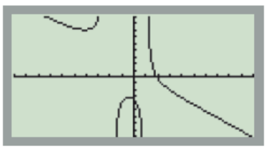
3) Déterminer par calcul la valeur exacte de la limite de g en $+\infty$.

15 Chacune des quatre captures d'écran représente une des quatre fonctions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,1\}$.
Sans utiliser la calculatrice ou un logiciel, associer chaque capture d'écran à sa fonction.

- $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 2}$
- $f : x \mapsto \dfrac{7 - x^3}{x^2 + x - 2}$
- $f : x \mapsto -\dfrac{2x}{x^2 + x - 2}$
- $f : x \mapsto \dfrac{x^4 + 2}{x^2 + x - 2}$

a


c


b


d


Limites : opérations

16 ► MÉTHODE 2 p. 60

Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition $\mathcal{D}$.

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6$ $\quad \mathcal{D} =]-\infty\,;\,+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ $\quad \mathcal{D} =]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$

3) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1}$ $\quad \mathcal{D} =]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$

4) $f(x) = \dfrac{1-2x}{(x-2)^2}$ $\quad \mathcal{D} =]-\infty\,;\,2[\cup]2\,;\,+\infty[$

18 Soit la fonction f définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{-5x+3}{x-2}.$$

1) Exprimer $f(x)$ sous la forme $a + \dfrac{b}{x-2}$.

2) Donner les limites aux bornes de $\mathcal{D}$.

3) Dresser le tableau de variation f.

19 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x - 6}{x - 2}.$$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 2}(x-2)$ et $\lim\limits_{x \to 2}(x^3 - x - 6)$.
En déduire que la limite de f en 2 est indéterminée.

2) Avec la calculatrice, faire un tableau de valeurs de $f(x)$ pour conjecturer la limite de f en 2.

3) Donner le développement de $(x-2)(x^2+2x+3)$.
S'en servir pour déterminer la limite de f en 2.

21 Calculer les limites en $\pm\infty$ des fonctions f, g et h.

1) $f : x \mapsto x\left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}\right)$.

2) $g : x \mapsto x\left(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{2x^2+1}\right)$.

3) $h : x \mapsto x\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - 1\right)$

22 Calculer les limites suivantes, à gauche et à droite s'il y a lieu.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x}$

24 **En −2, c'est rationnel !**

Étudier la limite de la fonction f en -2.

1) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2+3x+2}$

2) $f(x) = \dfrac{-x^2+x+6}{2x^2+5x+2}$

3) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{(x+2)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2-x-6}$

Comportement asymptotique

33 Déduire de chaque limite l'équation d'une éventuelle asymptote au graphe de la fonction f.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

2) $\lim\limits_{x \to +3} f(x) = -\infty$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = +\infty$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

6) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$

7) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 10^{100}$

8) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

34 Le graphe d'une fonction f admet une asymptote d'équation donnée. Déduire les limites possibles de f.

1) $x = 1$

2) $y = -2$

3) $y = 4$

4) $x = 0$

5) $x = -3$

6) $y = 0$

35 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = -2 + \frac{1}{x}.$$

1) Donner les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Donner les limites de f à droite et à gauche en 0.

3) Déduire de **1** et **2** les asymptotes à la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

36 INFO

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,2\}$ par :

$$g(x) = \frac{-3x^2+5}{x^2-4}.$$

1) Donner les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ puis en -2 et en 2.

2) Donner les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.

3) Avec un logiciel de calcul formel, étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote horizontale.

39 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3+4x-1}{x^3-1}.$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2) En déduire les équations des asymptotes à $\mathscr{C}$.

Limites : comparaison/encadrement

30 Soit une fonction f telle que $f(x)$ vérifie une inégalité ou un encadrement sur un ensemble donné. Indiquer les limites qu'on peut en déduire parmi les deux proposées.

1) Pour tout réel $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x} \leqslant f(x)$.

ⓐ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$ ⓑ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$

2) Pour tout réel $x \neq 0$, on a $f(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

ⓐ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$ ⓑ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$

3) Pour tout réel $x > 1$, on a $x + \frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant x + 1$.

ⓐ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x)$ ⓑ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

4) Pour tout réel $x > 0$, on a $-\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

ⓐ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ ⓑ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

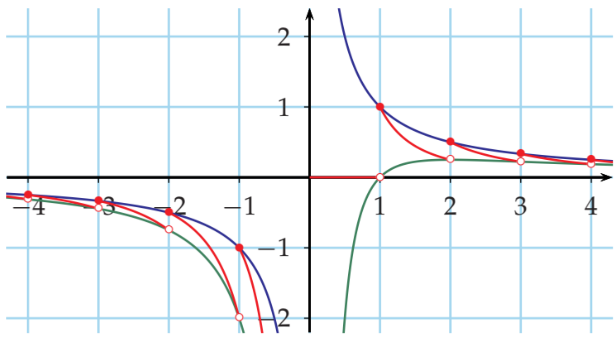
5) Pour tout réel $x \in]0\,;\,1[$, on a $|f(x) - 1| \leqslant x$.

ⓐ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ ⓑ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x)$

31 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x^2}$$

représentée dans le repère ci-dessous avec deux autres courbes d'équations $y = \frac{1}{x}$ et $y = \frac{x-1}{x^2}$.



1) Démontrer que, pour tout réel $x \neq 0$;

$$\frac{x-1}{x^2} < f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

2) En déduire la limite de f en $-\infty$ et $+\infty$.